

DISS. 1969, 7397

Antagonistische Signale beim Farbsehen und
ihr Zusammenhang mit der empfindungsgemässen
Farbordnung



Inauguraldissertation

zur

Erlangung der Würde eines Doktors der Philosophie

vorgelegt der

Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Basel

von

Klaus Dieter Eugen Richter

aus Giessen (Hessen), Deutschland

Giessen 1969

Chemoprint OHG

Diss.-Kat.

Antagonistische Signale beim Farbensehen und ihr Zusammenhang mit der empfindungsgemässen Farbordnung

Inauguraldissertation

zur

Erlangung der Würde eines Doktors der Philosophie

vorgelegt der

Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Basel

von

Klaus Dieter Eugen Richter

aus Giessen (Hessen), Deutschland

Giessen 1969

Chemoprint OHG

Genehmigt von der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
auf Antrag der

Herren Professoren

Dr. E. Baldinger

Dr. H. König

Basel, den 11. November 1969

Professor Dr. H. Nüesch
Dekan

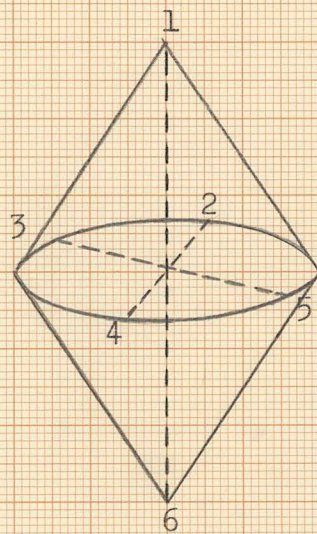
Antagonistische Signale beim Farbsehen und ihr Zusammenhang
mit der empfindungsgemässen Farbordnung.

	Seite
1. <u>Experimentelle Grundlagen des Farbsehens</u>	
1.1 Empfindungsgemässe Einteilung der Farben	1
1.2 Farbvektoren, Masssystem, Farbenraum	5
1.3 Stäbchen und Zäpfchen und ihre Empfindlich- keiten	8
1.4 Antagonistische Signale nach bisherigen Theorien und ihre Unvereinbarkeit mit experi- mentellen Ergebnissen	10
1.5 Neue Grundannahmen zur Vermeidung bisheriger Schwierigkeiten	15
2. <u>Antagonistische Funktionen des menschlichen Farben- sehens</u>	
2.1 Unbunt- und Buntfunktionen als Funktion der Wellenlänge	20
2.2 Grundhypothesen	30
2.3 Spektralfarbenzug und Spektralkegel	31
2.4 Nachmischung der Spektralfarben, Spektral- wertfunktionen	33
2.5 Schwerpunktsfarbtafel	41
2.6 Flimmerphotometrisches Experiment	47
3. <u>Aenderung der antagonistischen Funktionen unter Adaptationseinfluss</u>	
3.1 Spektralwertfunktionen bei Aenderung der anta- gonistischen Funktionen	50
3.2 Berechnung der antagonistischen Signale aus den Spektralwertfunktionen, Flimmerhelligkeit und Urfarblage im Spektrum	54
3.3 Wesentlichste Unterschiede der vorliegenden Theorie gegenüber der bisherigen	61

4. <u>Verschiedenheit der antagonistischen Buntsignale für eine weisse Farbe gemischt aus allen Spektralfarben und der Summe der antagonistischen Buntsignale für alle Einzelspektralfarben</u>	
4.1 Verschiedenheit von X_1 -Achse und unbunter Umfeldachse und ihre Konsequenzen	64
4.2 Spektrale Urfarben und Beschreibung von Farben gleichen Bunttons (Hue, MUNSELL-System)	79
4.3 Beschreibung der exzentrischen Verschiebung der Chroma-Ellipsen (Chroma 2, MUNSELL-System)	98
4.4 Beschreibung der Grau-Leuchtend-Grenze (EVANS-1967-Experimente)	110
4.5 Die Empfindungsstufung der Helligkeit beim Auge im Vergleich zur Stufung der Lautheit beim Ohr	115
4.6 Beschreibung der Chroma-Stufung (MUNSELL-System)	124
5. <u>Zusammenfassung und Ausblick</u>	141
Wichtige Erfolge der neuen antagonistischen Theorie des Farbensehens zur Beschreibung experimenteller Ergebnisse.	
Curriculum vitae	149

1.1 Empfindungsgemässe Einteilung der Farben

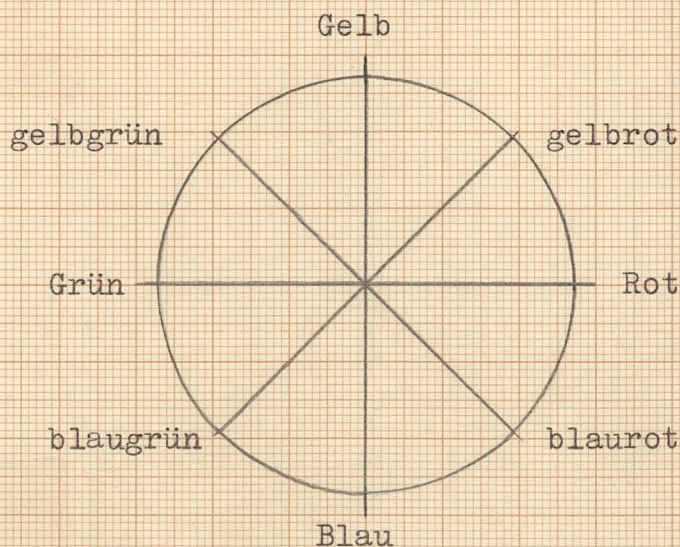
Versucht man die Farben zu ordnen, so gelangt man zunächst zur Einteilung in bunte und unbunte Farben. Die weitere Ordnung führt auf 6 "einfache" Farben, ein unbuntes Paar Weiss-Schwarz und zwei bunte Farbpaare Blau-Gelb und Rot-Grün. Diese Einteilung kann durch ein "Doppelkegelmodell" veranschaulicht werden. Auf seiner senkrechten Achse liegen die unbunten Farben, auf seiner grössten Umgrenzung die einfachen bunten und ihre Uebergänge.



(1.1;Abb.1)
Empfindungsgemässe Farb-
ordnung

1 Weiss	6 Schwarz
2 Gelb	4 Blau
3 Grün	5 Rot

Die einfachen bunten Farben und ihre Uebergänge bezeichnet man als Bunttonkreis. Er nennt sich Bunttonkreis, weil er alle Bunttöne in kontinuierlicher Folge enthält.



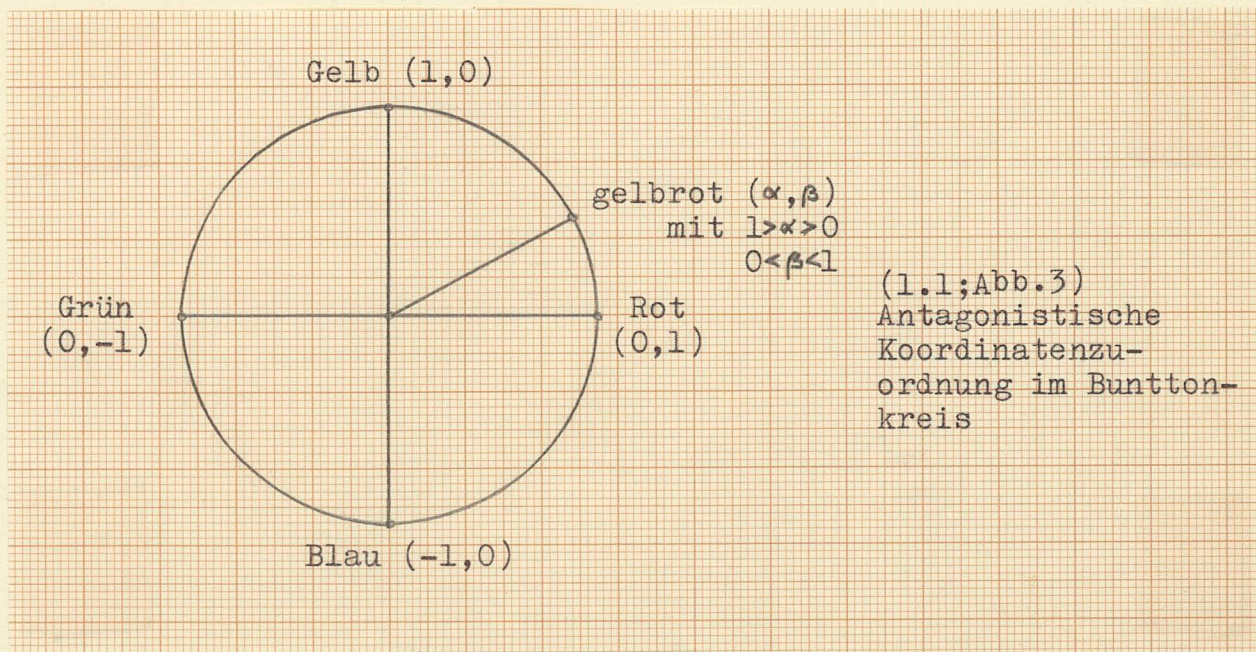
(1.1;Abb.2)
Symmetrischer
Bunttonkreis

Man nennt den hier gezeigten Bunttonkreis symmetrisch, wenn die sogenannten "Weder-noch"-Farben oder "Urfarben" (engl. unique hues) Blau-Gelb und Rot-Grün paarweise gegenüberliegen.

Der Buntton der "Weder-noch-Farbe" Gelb ist dadurch ausgezeichnet, dass an dieser Stelle des kontinuierlichen Bunttonkreises die bunte Farbe weder grünlich noch rötlich erscheint. Es ergibt sich rein empfindungsmässig, dass man aus einem Farbkreis genau 4 Weder-noch-Farben auswählen kann: Gelb, Rot, Blau und Grün. Die dazwischenliegenden Farben z.B. Orange bezeichnet man als "sowohl-als-auch"-Farben (sowohl rötlich als auch gelblich).

Weiter ergibt sich, dass keine bunte Farbe die Empfindung gelblich und zugleich bläulich und keine bunte Farbe die Empfindung rötlich und zugleich grünlich hervorruft. Jede bunte Farbe kann entweder bläulich oder gelblich empfunden, aber niemals zugleich bläulich und gelblich. Das Farbpaar Blau-Gelb und das Farbpaar Rot-Grün sind antagonistische Pole der Ordnung der bunten Farben.

Mathematisch können wir die einfachen bunten Farben durch 2 Koordinaten beschreiben. Wir ordnen den Farben Gelb-Blau die Koordinaten $(1,0)$ bzw. $(-1,0)$ zu. Entsprechend erhalten die einfachen bunten Farben Rot-Grün die Koordinaten $(0,1)$ bzw. $(0,-1)$. Abb.3 veranschaulicht die Zuordnung.



Folgerichtig müssen den gelbroten Farben Koordinaten (α, β) zugeordnet werden, die einen Uebergang zwischen den Koordinaten von Rot $(0,1)$ und Gelb $(1,0)$ bilden. Es gilt also $1 > \alpha > 0$ und $0 < \beta < 1$. Entsprechende Zuordnungen sind für blaurote, blaugüne und gelbgrüne Farben möglich.

Es liegt nahe anzunehmen, dass in unserem visuellen System beim Farbensehen Signale in einem Kanal Gelb-Blau und einem Kanal Rot-Grün erzeugt werden. Sie können in jedem Kanal positiv oder negativ oder Null sein.

Sind die Signale im Blau-Gelb-Kanal Null, so liegt eine rote oder grüne oder unbunte Farbe vor.

Sind die Signale im Rot-Grün-Kanal Null, so liegt eine gelbe oder blaue oder unbunte Farbe vor.

Für alle Uebergangsfarben der "einfachen" oder Urfarben im Bunttonkreis sind sowohl die Signale im Blau-Gelb-Kanal als auch im Rot-Grün-Kanal verschieden von Null. Zum Beispiel für gelbrot sind die Signale in beiden Kanälen grösser Null.

Wir wissen heute, dass die in der Netzhaut durch Lichtreiz entstehenden Signale elektrische Impulse gleicher Amplitude sind. Durch Frequenzmodulation, d.h. durch Erhöhen oder Erniedrigen der Wellen- und Intensitätsabhängigen Impulsfrequenz gegenüber einer Ruhefrequenz wird der Lichtreiz zum corticalen Sehzentrum im Gehirn geleitet.

Wenn es eine physikalische Erklärung der Einteilung in 4 bunte Urfarben und ihre Uebergänge gibt, so könnte Frequenz-Erhöhung oder -Erniedrigung gegenüber einer Ruhefrequenz in 2 Kanälen der empfindungsgemässen Einteilung entsprechen. Die erhöhte Impulsfrequenz könnte ein positives und die erniedrigte ein negatives Potential im Gehirn gegenüber dem Ruhepotential aufbauen. Positive oder negative Signale würden der Einteilung in 2 Farbpaare Blau-Gelb und Rot-Grün entsprechen.

Wir müssen vermuten, dass nach Ermittlung des antagonistischen Signalverlaufs als Funktion der Wellenlänge die gesetzmässigen Zusammenhänge beim Farbensehen, d.h. die Zusammenhänge zwischen physikalischem Lichtreiz und Farbempfindung in einfacher Weise von den antagonistischen Signalen abhängen.

Wir müssen annehmen, dass wir dann äquivalente antagonistische Signale gefunden haben, wenn für alle bunten Farben, die wir im Buntton als Urfarbe empfinden, die zugeordneten Signale im entsprechenden Buntkanal Null werden.

Es sei bemerkt, dass das Ziel nur teilweise zu erreichen sein wird. Eines der Hauptschwierigkeiten liegt nämlich in der experimentellen Tatsache, dass durch additive oder anteilige Mischung von Rot (Koordinate 0, 1) und Grün (Koordinate 0, -1) zwar ein Buntton erzeugt werden kann, der weder rot noch grün empfunden wird, doch ist diese Mischfarbe nicht Unbunt (Koordinate 0, 0), sondern ausgesprochen gelblich (Koordinate $\alpha > 0$, 0). Wir werden versuchen, diese experimentelle Tatsache zu beschreiben. Ihre mathematische Beschreibung wird der Schlüssel zur Beschreibung bunttongleicher Farben (gleiches Hue im Munsell-System) und buntkraftgleicher Farben (gleiches Chroma im Munsell-System) sein.

1.2 Farbvektoren, Massystem, Farbenraum

Unser Auge hat die Fähigkeit, elektromagnetische Strahlung im sichtbaren Spektralbereich von 400 - 700 nm zu "sehen". Für jede Strahlungsverteilung aus diesem Spektralbereich entsteht eine spezielle Farbempfindung, die wir etwa mit helles Rot, dunkles Grün, tiefes Blau, usw. zu bezeichnen pflegen.

Wir wollen uns einige grundlegende Experimente in einer Dunkelkammer ausgeführt denken. Irgendwelche Spektralverteilungen sichtbarer Strahlung bezeichnen wir kurz als Lichter S_i . Wir denken uns zwei aneinandergrenzende Halbkreisfelder und experimentieren mit 5 Lichtern S_i ($i = 1, 2, \dots, 5$).



Dann gelten folgende (zum Teil triviale) Eigenschaften:

Eigenschaft 1) $S_1 \longleftrightarrow S_2^*) \rightsquigarrow S_2 \longleftrightarrow S_1$ (Reflexivität)

Eigenschaft 2) $S_1 + S_2 \longleftrightarrow S_2 + S_1$ (Symmetrie)

Eigenschaft 3) $S_1 \longleftrightarrow S_2 \rightsquigarrow S_1 + S_3 \longleftrightarrow S_2 + S_3$ (Transitivität)

Eigenschaft 4) Es gibt a_i so, dass

$$S_4 \longleftrightarrow a_1 S_1 + a_2 S_2 + a_3 S_3 \quad (\text{Abhängigkeit}),$$

falls nicht S_1, S_2 und S_3 linear abhängig sind,
also z.B. S_1 aus S_2 und S_3 ermisierbar ist.

*) \longleftrightarrow sieht gleich aus wie; \rightsquigarrow daraus folgt

Nach Eigenschaft 4) folgt, dass auch ein Licht S_5 aus S_1 , S_2 und S_3 oder aus S_2 , S_3 und S_4 gemischt werden kann. So gibt es b_i und c_i so, dass gilt

$$S_5 \longleftrightarrow b_1 S_1 + b_2 S_2 + b_3 S_3 \quad (1.2;1)$$

$$S_5 \longleftrightarrow c_2 S_2 + c_3 S_3 + c_4 S_4 \quad (1.2;2)$$

Einsetzen von S_4 in die letzte Gleichung ergibt

$$S_5 \longleftrightarrow c_4 a_1 S_1 + (c_4 a_2 + c_2) S_2 + (c_4 a_3 + c_3) S_3 \quad (1.2;3)$$

Es ergibt sich experimentell, dass gilt

Eigenschaft 5)

$$\begin{aligned} b_1 &= c_4 a_1 & c_4 &= \frac{b_1}{a_1} \\ b_2 &= c_4 a_2 + c_2 & c_2 &= b_2 - \frac{a_2}{a_1} b_1 \\ b_3 &= c_4 a_3 + c_3 & c_3 &= b_3 - \frac{a_3}{a_1} b_1 \end{aligned}$$

Die Genauigkeit beträgt ungefähr 3 Dezimalen. Die Unterschiede verschiedener normalsichtiger Beobachter sind grösser als die des gleichen Beobachters.

Wegen Eigenschaft 4) ist die Abhängigkeit von Farben von der Dimension 3. Wegen Eigenschaft 5) besteht ein linearer Uebergang zwischen der Kennzeichnung der Farbe S_5 im System S_1, S_2, S_3 (Gleichung 1.2;1) und ihrer Kennzeichnung im System S_2, S_3, S_4 (Gleichung 1.2;2). Da weiter die Gesetze der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität erfüllt sind, so ist es erlaubt, den Lichtern 3-dimensionale Vektoren zuzuordnen. An Stelle des Zeichens \longleftrightarrow (sieht gleich aus wie) ist es üblich, das Gleichheitszeichen $=$ zu setzen.

Wir schreiben daher:

$$\vec{S}_5 = a_1 \vec{S}_1 + a_2 \vec{S}_2 + a_3 \vec{S}_3 \quad (1.1;4)$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{S}_1 &= (1, 0, 0) \\ \vec{S}_2 &= (0, 1, 0) \\ \vec{S}_3 &= (0, 0, 1) \end{aligned} \quad (1.1;5-7)$$

Wenn man für diese "Farbvektoren" die Regeln der Vektorrechnung anwendet, so sind die Eigenschaften 1) bis 5) widerspruchsfrei erfüllt.

Nun kann man nach Eigenschaft 4) jede Farbe \vec{f} durch 3 gegebene Lichter ermischen. In der Regel nimmt man 3 monochromatische Spektralfarben etwa Rot \vec{r} , Grün \vec{g} und Blau \vec{b} . Es gilt die Gleichung

$$\vec{f} = R\vec{r} + G\vec{g} + B\vec{b} \quad (1.1;8)$$

\vec{r} , \vec{g} und \vec{b} heissen Primärvektoren. Sie können beliebig aus der Menge aller Spektralfarben gewählt werden und die Festlegung ihrer Einheiten ist ebenfalls willkürlich. Wenn man jedoch eine Vereinbarung ihrer Wellenlängen und Intensitäten trifft, so sieht man sofort ein, dass man jede Farbe in Einheiten dieser drei Primärfarben kennzeichnen kann. Die drei willkürlich gewählten Primärfarben können als Masssystem für alle Farben dienen.

Zur quantitativen Festlegung des Massystems müssen eine Vielzahl von Nachmischexperimenten ausgeführt werden. In jedem Experiment ist es allein unser Auge, was entscheiden muss und kann, ob die zwei Halbkreisfelder gleich sind oder nicht. Durch die Messung der Farben in Anteilen R, G und B von 3 Primärfarben wird eine erste Ordnung aller Farben erreicht. Diese Ordnung aller Farben fällt wegen der Eigenschaft 4) dreidimensional aus und man spricht daher von Ordnung im Farbenraum.

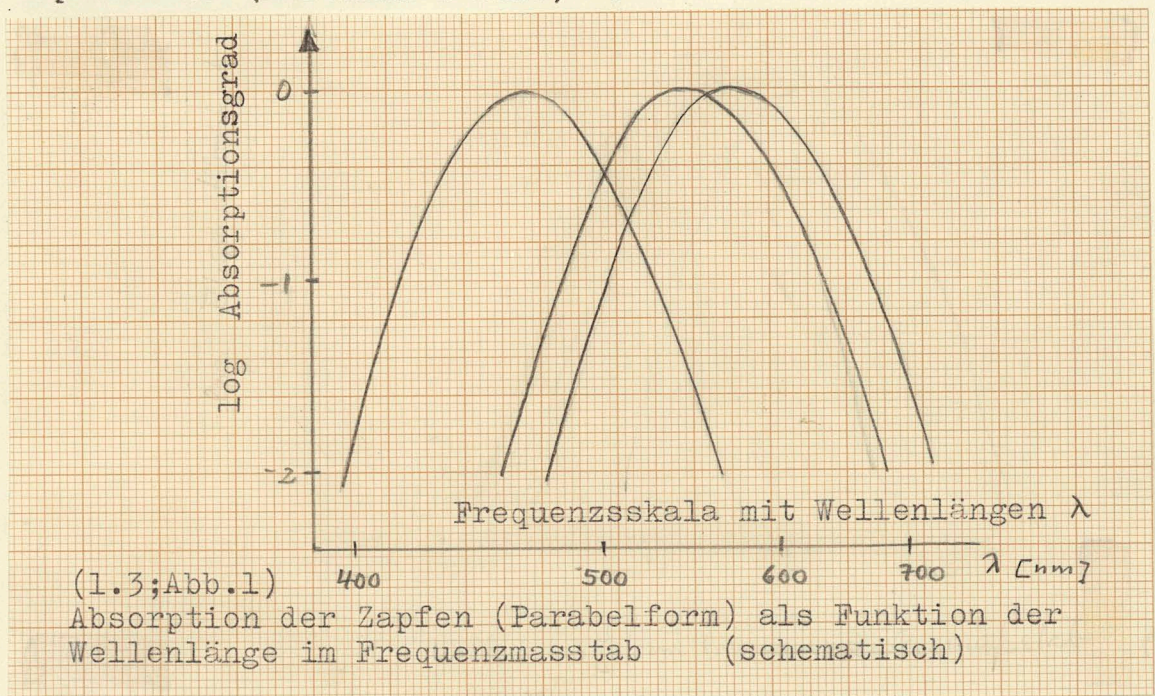
1.3 Stäbchen und Zäpfchen und ihre Empfindlichkeiten

Man unterscheidet im Auge Zäpfchen und Stäbchen.

Die Stäbchen sind verantwortlich für das Nachtsehen und vermitteln nur unbunte Empfindungen. Das Maximum ihrer Empfindlichkeit liegt bei 500 nm. Sie sollen nur beim Dämmerungssehen und nicht oder kaum bei normalem Tagessehen erregt werden.

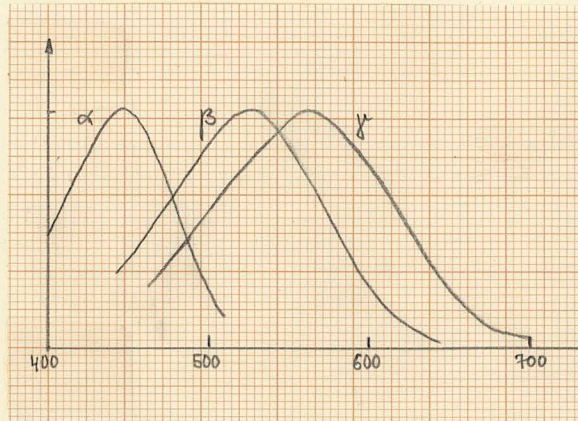
Die Zäpfchen sollen erst bei genügend grosser Energie der ins Auge fallenden sichtbaren Strahlungen in Aktion treten. Sie vermitteln die Farbempfindungen im Tagessehen.

Man hat in den letzten Jahren 3 verschiedene Arten von Zäpfchen nachgewiesen. Ihr spektrales Absorptionsmaximum liegt nahe den spektralen Wellenlängen 448, 528 und 567 nm¹⁾. Der Logarithmus ihrer Absorption aufgetragen über der Frequenz ist nahezu eine Parabel mit gleicher Form³⁾ für alle 3 Zapfenarten (Dartnall's rule)²⁾.



- 1) D. Jameson and L.M. Hurvich, JOSA 58, 3, 1968, S.429, Opponent-Response Functions Related to Measured Cone Pigments. (Mit weiterer Primärliteratur).
- 2) H.J.A. Dartnall, Brit. Med. Bull, 9, 1953.
- 3) K.I. Naka and W.A.H. Rushton, Journ. Physiology 185, 556 (1966), An attempt to analyse colour perception by electrophysiology.

Nach JAMESON und HURVICH¹⁾ ergeben sich als Funktion der Wellenlänge folgende spektrale Absorptionskurven.



(1.3; Abb. 2)
 Spektrale Absorption als
 Funktion der Wellenlänge
 (nach HURVICH und JAMESON)

Die Verteilung der Zäpfchen über die Retina ist in der Fovea besonders dicht und nimmt radial ab (Ausnahme: blinder Fleck). Auch sind nicht gleich viel von jeder Zäpfchenart vorhanden. Das Verhältnis ist im Mittel Blau : Grün : Gelb = 1 : 10 : 11.

Weiter wird durch die gelb-gefärbten Augenmedien eine Lichtfilterung bewirkt, die die Rezeptorempfindlichkeit am blauen Spektralende um 90 % herabsetzt¹⁾ oder 4).

Wegen der ungesicherten Absorption der Zapfen an den Flanken und ihres so unterschiedlichen Vorkommens ist die Berechnung von antagonistischen Signalen aus den Rezeptorempfindlichkeiten noch fehlerhaft. Sie wurde von JAMESON und HURVICH¹⁾ sowie HASSENSTEIN⁴⁾ durchgeführt. Ihre Ergebnisse und Methode wollen wir im nächsten Kapitel studieren.

4) B. Hassenstein, Modellrechnung zur Datenverarbeitung beim Farbensehen des Menschen, Kybernetik 4, 6, 1968.

1.4 Antagonistische Signale nach bisherigen Theorien und ihre Unvereinbarkeit mit experimentellen Ergebnissen.

HURVICH und JAMESON^{1),3)}, sowie HASSENSTEIN²⁾ nehmen an, dass die antagonistischen Signale für Gelb-Blau und Rot-Grün lineare Transformationen der Rezeptorempfindlichkeiten sind. Wir bezeichnen wie HURVICH und JAMESON²⁾ die Rezeptorempfindlichkeiten mit $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$, $\gamma(\lambda)$ für die im blauen, grünen und gelben empfindlichen Rezeptoren. Die Empfindlichkeiten der Rezeptoren sind herabgesetzt durch Absorptionen der optischen Medien und des Makulapigmentes. Die Transmission $\tau(\lambda)$ der Augenmedien reduziert das Licht im Blau um 90% und im Rot nur um 30%. Das Absorptionsvermögen der Rezeptoren wird durch

$$\frac{\alpha(\lambda)}{\tau(\lambda)}, \quad \frac{\beta(\lambda)}{\tau(\lambda)}, \quad \frac{\gamma(\lambda)}{\tau(\lambda)} \quad (1.4;1-3)$$

gekennzeichnet.

Die antagonistischen Signale sind Lineartransformationen L_i ($i = 1,2,3$) der Rezeptorempfindlichkeiten.

Wir nennen die Unbunt- und Buntsignale $\psi_i(\lambda)$ ($i = 1,2,3$). Es gilt

$$\psi_i(\lambda) = L_i [\alpha(\lambda), \beta(\lambda), \gamma(\lambda)] \quad (1.4;4)$$

Die Unbuntsignale $\psi_1(\lambda)$ entsprechen der Funktion $w_\lambda - bk_\lambda$ von HURVICH und JAMESON ($w = \text{weiss}$, $bk = \text{black}$), die Gelb-Blau-Buntsignale $\psi_2(\lambda)$ entsprechen der Funktion $b_\lambda - y_\lambda$ ($b = \text{blau}$, $y = \text{gelb} = \text{yellow}$) und die Rot-Grün-Buntsignale $\psi_3(\lambda)$ entsprechen der Funktion $r_\lambda - g_\lambda$ ($r = \text{rot}$, $g = \text{grün}$).

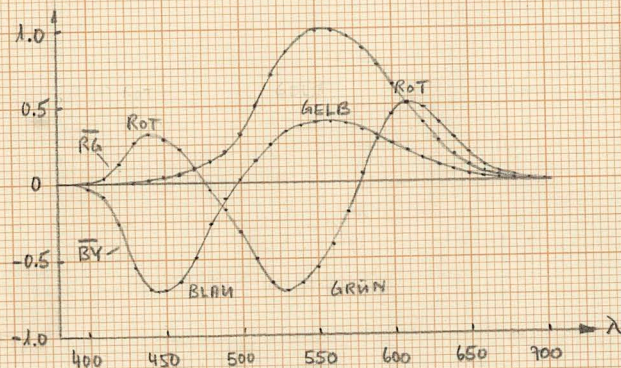
Unbunt- und Buntsignale nach der Theorie von HURVICH und JAMESON und nach der Theorie von HASSENSTEIN sind in Abb. 1 und 2 wiedergegeben. Die Kurven der Abbildung 1 sind unter Benutzung farbmetrischer Daten gewonnen. (Sie sind Lineartransformationen der Spektralwertfunktionen). Die Kurven der Abbildung 2 sind Linear-

1) L.M. Hurvich and D. Jameson, J. Opt. Soc. Am. 45, 546-552 und 602-616 (1955).

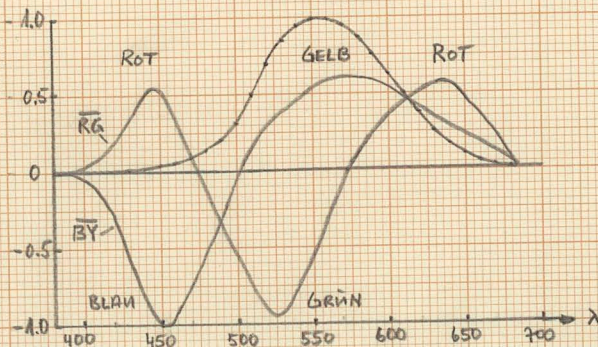
2) B. Hassenstein, Kybernetik 4, 209-223 (1968).

3) D. Jameson and L.M. Hurvich, J. Opt. Soc. Am. 58, 429-430 (1968).

transformationen von Rezeptorempfindlichkeiten, deren noch nicht genau bekannter Verlauf durch Modellkurven angenähert wurde. Ausserdem müssen in diesem Fall noch die Koeffizienten der Lineartransformationen L_i durch theoretische Ueberlegungen ermittelt werden.



(1.4; Abb. 1)
Unbunt- und Buntsignale¹⁾
nach HURVICH und JAMESON¹⁾
(Urfarbpunkte: 472, 500, 580)



(1.4; Abb. 2)
Unbunt- und Buntsignale²⁾
nach HASSENSTEIN²⁾
(Urfarbpunkte: 474, 502, 575)

Die Grundideen, die zur Ermittlung der Buntfunktionen führen, sollen im folgenden kurz zusammengefasst werden.

Annahme 1. Die Buntfunktionen sind Lineartransformationen der Rezeptorempfindlichkeiten

$$\psi_i(\lambda) = L_i [\alpha(\lambda), \beta(\lambda), \gamma(\lambda)] \quad (1.4;5)$$

Annahme 2. Die Buntfunktionen sind Lineartransformationen der Spektralwertfunktionen

$$\psi_i(\lambda) = L_i [r(\lambda), g(\lambda), b(\lambda)] \quad (1.4;6)$$

Annahme 3. Die Wellenlängen der spektralen Urfarben Blau λ_B , Grün λ_G und Gelb λ_Y sind Nullstellen der Buntfunktionen.

"Spektrales" Urrot kann durch Mischung der Spektralfarben $\lambda = 400$ nm (Spektralanfang) und $\lambda = 700$ nm (Spektralende) erzeugt werden. Eine Festlegung der Buntfunktionen für die farbmétrisch durch die Wellenlänge λ^C (komplementäre Wellenlängen zu grünen Spektralfarben) kennzeichenbaren Purpurfarben erfolgt nicht, doch wird wohl stillschweigend vorausgesetzt, dass auch für die Wellenlänge λ_R^C des Urrot die Gelb-Blau-Buntfunktion Null wird (siehe auch Punkt 6.).

Annahme 4. Für "Weiss" sollen "physiologisch gleichviel Blau- und Gelb-Signale und zugleich physiologisch gleichviel Rot- und Grün-Signale" entstehen²⁾.

Es habe "Weiss" die spektrale Energieverteilung $f(\lambda)$. Dann gilt

$$X_i = \int_{400}^{700} \psi_i(\lambda) f(\lambda) d\lambda \quad (1.4;7)$$

Experimentell werden die verschiedensten Energieverteilungen $f(\lambda)$ (z.B. Tageslicht der Farbtemperatur 6500° K = Normlichtart C oder das energiegeliche Spektrum oder das quantengleiche Spektrum) von unserem Auge ohne weiteres als "Weiss" akzeptiert und empfunden (Adaptation an "weisses" Umfeld).

2) Siehe z.B. Hassenstein, Kybernetik 4, S.213 oben (1968).

Annahme 5. Für alle "Weiss" der Strahlungsverteilungen $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, ... sollen die Buntsignale X_2 und X_3 identisch Null sein. Daher wird angenommen, dass so für jedes "Weiss" die antagonistischen Buntfunktionen $\psi_2(\lambda)$ und $\psi_3(\lambda)$ ändern.

Die genannten Autoren berechnen deshalb die antagonistischen Buntfunktionen nur jeweils für eine bestimmte Strahlungsverteilung $f(\lambda)$.

HURVICH und JAMESON benutzen das "Weiss" des energiegleichen Spektrums, HASSENSTEIN ein "Weiss" von der Farbtemperatur 6500°K . Nur für diese "Weiss" werden die jeweiligen Buntsignale X_2 und X_3 Null.

Annahme 6. Es wird angenommen, dass aus spektralem Urgelb und Urblau und ebenso aus "spektralem" Urrot und Urgrün Weiss ermisierbar ist.

"Spektrales" Urrot und spektrales Urgrün mischen sich aber bei einem Umfeld des mittleren Tageslichtes zu einer ausgesprochen gelben Farbe. In der Theorie von HURVICH und JAMESON scheint die Mischung von "spektralem" Urrot und spektralem Urgrün nicht diskutiert zu werden. Ihre Mischbarkeit zum entsprechenden "Weiss" des energiegleichen Spektrums scheint vorausgesetzt zu werden.

Mit den Annahmen 1 - 6 werden die Buntfunktionen bei HURVICH und JAMESON sowie HASSENSTEIN berechnet. Für genaueres sei auf die Originalliteratur verwiesen. Punkt 6 steht im Widerspruch zu den Experimenten. Die Annahmen müssen daher modifiziert werden. Auch die Annahmen 4 und 5 werden geändert. Der Zwang zu Änderungen soll durch die folgenden Betrachtungen verständlich gemacht werden.

Mathematisch stehen wir vor dem Problem, dass sich aus einer roten Urfarbe (etwa mit dem Unbuntsignal 1) und einer grünen Urfarbe mit gleichem Unbuntsignal ein gelber Urfarbbuntton ermischen lässt. Es gilt also

mit

$$\vec{r} = (1, 0, \alpha)$$

$$\vec{g} = (1, 0, -\beta)$$

$$\vec{y} = (1, \gamma, 0)$$

$$\text{Urrot} \quad \alpha > 0 \quad (1.4; 8-10)$$

$$\text{Urgrün} \quad \beta > 0$$

$$\text{Urgelb} \quad \gamma > 0$$

die Gleichung

$$a_1 \vec{r} + b_1 \vec{g} = \vec{y} \quad (1.4; 11)$$

oder in Komponenten

$$a_1 + b_1 = 1$$

$$0 = \gamma$$

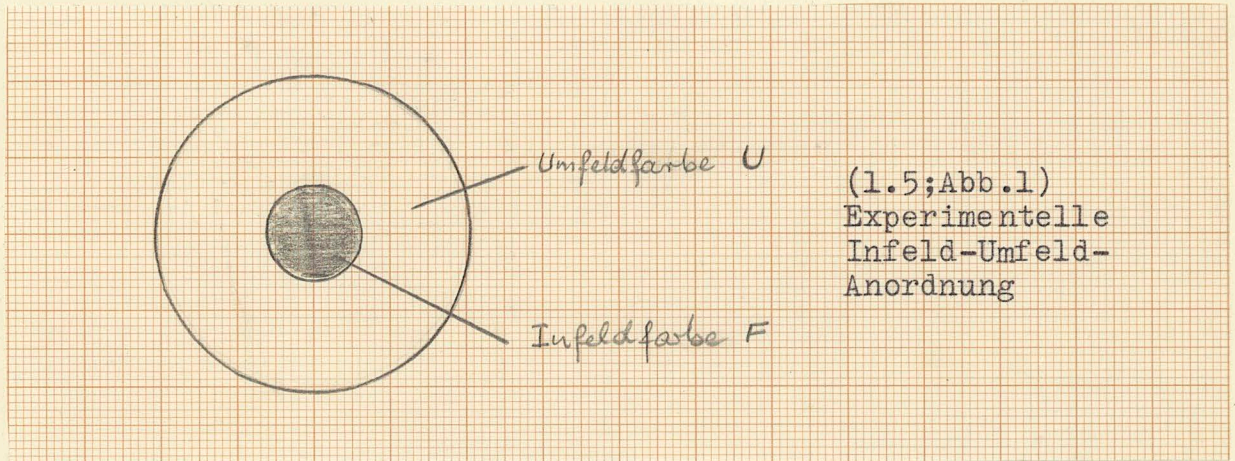
$$a_1 \alpha - b_1 \beta = 0$$

$$(1.4; 12-14)$$

Gleichung (1.4; 13) $\gamma = 0$ steht im Widerspruch zum experimentellen Ergebnis $\gamma > 0$.

1.5 Neue Grundannahmen zur Vermeidung bisheriger Schwierigkeiten

Wir denken uns Experimente in einer Infeld- Umfeldanordnung in sonst dunklem Raum ausgeführt.



Verschiedenste Strahlungsverteilungen $U_1(\lambda)$, $U_2(\lambda)$ im Umfeld werden als "Weiss" empfunden (Umfeldbezug der Infeldfarben).

Die Strahlungsverteilungen des In- und Umfeldes mögen sich wenig unterscheiden. Wir nehmen an, dass die Infeldfarbe rötlich gegenüber dem als "Weiss" empfundenen Umfeld aussieht. Bringen wir die Infeldfarbe ins Umfeld und die Umfeldfarbe ins Infeld, so erscheint die vorher rötliche Infeldfarbe im Umfeld weiss und die vorher weisse Umfeldfarbe im Infeld grün. Diese Kontrasterscheinungen sind wohlbekannt. Nach der bisherigen Theorie sollen sich die Buntfunktionen $\psi_2(\lambda)$ und $\psi_3(\lambda)$ beim Uebergang von einem Umfeld zum andern ändern. (Annahme 5)

Unsere folgenden Annahmen werden darauf hinauslaufen, dass sich nur für Farben in der Nähe des Umfeldfarbortes die Buntsignale stark ändern, während das Umfeld auf die spektralen Buntsignale keinen (oder nur geringen) Einfluss hat.

Mit dieser experimentell nahegelegten Erkenntnis machen wir folgende Annahme:

Annahme 7. Die Buntfunktionen $\psi_2(\lambda)$ und $\psi_3(\lambda)$ als Funktion der Wellenlänge sind invariant¹⁾ für alle Strahlungsverteilungen $U_1(\lambda)$, $U_2(\lambda)$, ..., die als "Weiss" empfunden werden.

Annahme 7 ist offensichtlich genau das Gegenteil der bisherigen Annahme 5, auf die wir verzichten wollen.

Wir führen die sogenannten Sättigungssignale ein. Es sei für Spektralfarben

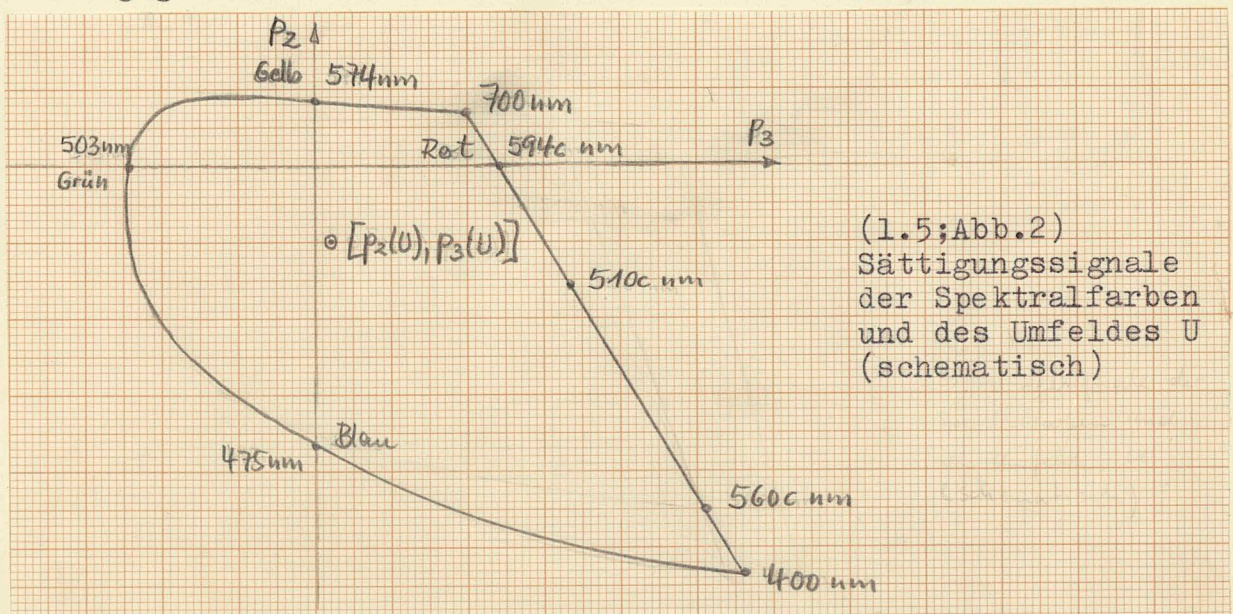
$$p_i(\lambda) = \frac{\psi_i(\lambda) f(\lambda) \delta(\lambda - \lambda')}{\psi_1(\lambda) f(\lambda) \delta(\lambda - \lambda')} \quad (i = 2, 3) \quad (1.5; 1)$$

und für beliebige Farben der Strahlungsenergie $f(\lambda)$

$$p_i(\tau) = \frac{\int_{400}^{700} \psi_i(\lambda) f(\lambda) d\lambda}{\int_{400}^{700} \psi_1(\lambda) f(\lambda) d\lambda} = \frac{\text{Buntsignal}}{\text{Unbuntsignal}} \quad (i = 2, 3) \quad (1.5; 2)$$

Für Spektralfarben ändert sich das Sättigungssignal mit neuem $f(\lambda)$ nicht. Ist $U(\lambda)$ die Strahlungsverteilung des Umfeldes U , so werden für jede Strahlungsverteilung die Sättigungssignale verschieden ausfallen und zwar normalerweise verschieden von Null sein. Man folgert aus Experimenten, dass die Sättigungssignale der einzelnen Spektralfarben verschieden sind. Gelb erhält die kleinsten und Blau die grössten Sättigungssignale.

In Abb. 2 sei dieses bekannte experimentelle Ergebnis schematisch wiedergegeben.

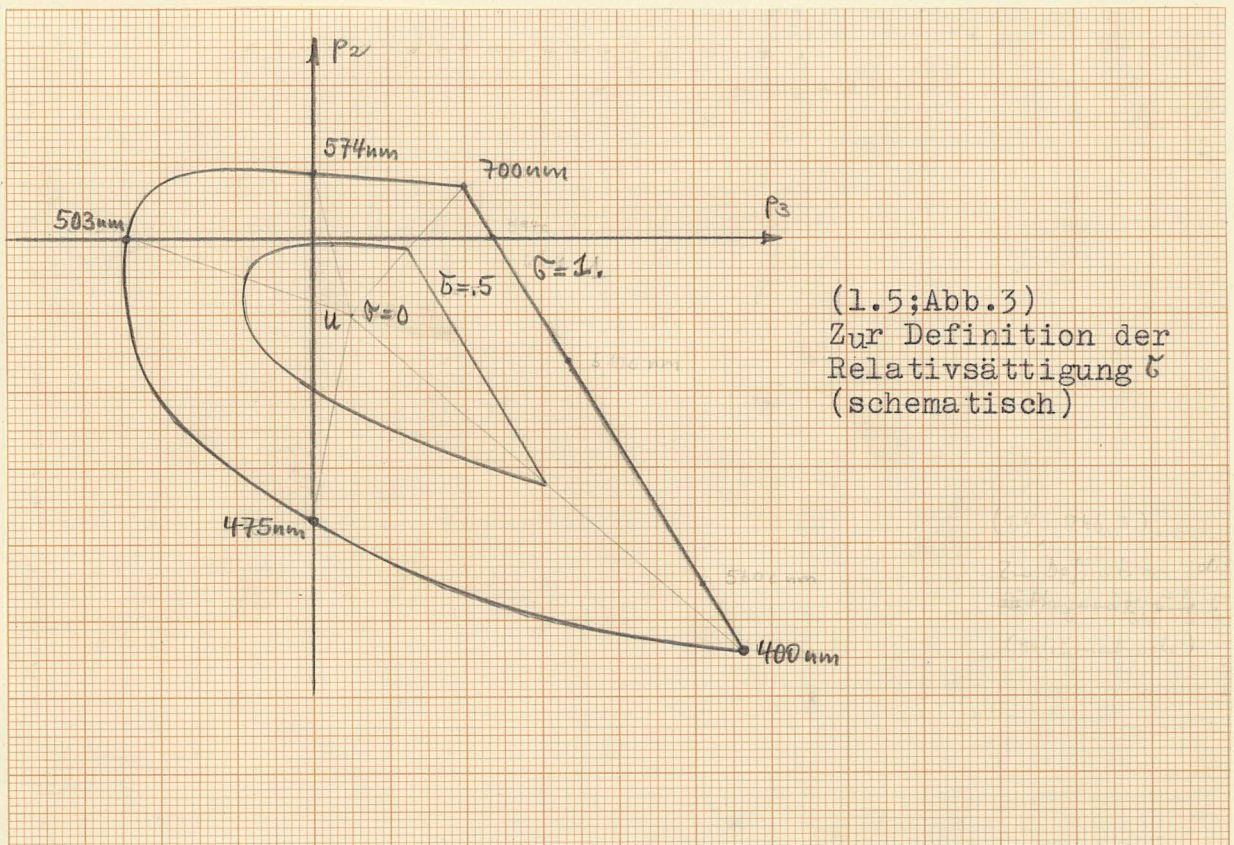


1) Später werden kleine Änderungen zugelassen (Kapitel 3).

Das Sättigungssignal des Umfeldes liegt normalerweise nicht im Ursprung, sondern es ist (siehe Abb.2)

$$p_2(u) \neq 0 \quad \text{und} \quad p_3(u) \neq 0. \quad (1.5;3-4)$$

Wir führen die aus der Farbmeterik bekannte Relativsättigung \bar{c} in Bezug auf das als "Weiss" empfundene Umfeld U ein.



Es ist für Spektralfarben $\bar{c} = 1$ für die Farbe des Umfeldes $\bar{c} = 0$. Jedem Farbort wird durch lineare Definition (Abstandsverhältnis) eindeutig eine Relativsättigung mit $0 \leq \bar{c} \leq 1$ zugeordnet.

Es ist

$$\bar{c} = \frac{p_r(F)}{p_r(\lambda)} = \frac{\sqrt{[p_2(F) - p_2(u)]^2 + [p_3(F) - p_3(u)]^2}}{\sqrt{[p_2(\lambda) - p_2(u)]^2 + [p_3(\lambda) - p_3(u)]^2}} \quad (1.5;5)$$

Unter Verwendung von \bar{c} können wir Annahme 8 formulieren.

Annahme 8. Die Buntsignale $X_i(F)$ beliebiger Farben werden je nach Umfeld beeinflusst. Die Beeinflussung wird durch die Gleichung

$$X_i^*(F) = X_i(F) - f(\delta_F) X_i(U) \quad (i=2,3) \quad (1.5;6)$$

mit

$$\begin{aligned} f(\delta) &= 1 & \text{für } \delta &= 0 \\ f(\delta) &= 0 & \text{für } \delta &= 1 \end{aligned} \quad (1.5;7-8)$$

beschrieben.

Die Sättigungssignale p_i^* sind dann entsprechend ihrer Definition durch die Gleichung

$$p_i^*(F) = p_i(F) - f(\delta_F) p_i(U) \quad (i=2,3) \quad (1.5;9)$$

gegeben.

Nach diesen Gleichungen ist für jede als "Weiss" empfundene Strahlungsverteilung $U(\lambda)$ zunächst nach Annahme 7. $X_i(F) = X_i(U)$ und wegen $f(\delta) = -1$ tatsächlich $X_i^* = 0$ ($i = 2,3$)

Insbesondere werden später Funktionen $f(\delta) = 1 - \delta^{1/2}$ (quadratisch zunehmender Umfeldeinfluss mit abnehmender Relativsättigung der Infeldfarbe) oder ähnliche benutzt.

Die Annahme 4 wird durch Annahme 8 befriedigt. Die Koordinaten von "Weiss" X_2^* und X_3^* werden Null. Jedoch hat sich die Interpretation von Annahme 4 geändert. Es gilt

$$\underbrace{X_i^*}_{\substack{\text{Buntsignal} \\ \text{von "Weiss"} \\ \equiv 0}} = \underbrace{\int_{400}^{700} \psi_i(\lambda) f(\lambda) d\lambda}_{\substack{\text{Summe der Buntsignale} \\ \text{aller Einzelspektralfarben}}} - f(\delta) X_i(U) \quad (1.5;10) \quad (U = \text{Umfeld})$$

Es ist nicht mehr wie der Interpretation von Annahme 4 zu entnehmen das Buntsignal von "Weiss", das heisst der Mischfarbe aus allen Spektralfarben, gleich der Summe der Buntsignale aller Einzelspektralfarben.

Weiter erkennt man, dass die im Widerspruch zu den Experimenten stehende Annahme 6 (Mischung von Urrot und Urgrün zu "Weiss") nicht mehr erforderlich ist. Liegt der Farbort $p_2(U)$, $p_3(U)$ der Umfeldfarbe nicht im Ursprung des Koordinatensystems und auch nicht auf einer der beiden Koordinatenrichtungen, so werden sich weder Urrot und Urgrün noch Urblau und Urgelb zum Unbunt des Umfeldes mischen.

Die Ueberprüfung der bisherigen Grundannahmen zur Entwicklung und Herleitung der antagonistischen Buntfunktionen ergab zunächst einen Widerspruch zu den experimentellen Ergebnissen (Annahme 6; es mischen sich Urrot und Urgrün nicht zu Weiss, sondern zu einer gelben Farbe). Es wurde ein Weg aufgezeigt, der unter Verzicht auf die bisherigen Annahmen 4 - 6 mit zwei neuen Annahmen 7 - 8 die Widersprüche zu beseitigen scheint. So entsteht aus den bisherigen Annahmen 1 - 3 und zwei neuen Annahmen 7 - 8 ein neues "Gerüst" zur Herleitung der antagonistischen Buntfunktionen. Es könnte sein, dass das hier auf den Annahmen 1 - 3 sowie 7 und 8 aufgebaute neue "Gerüst" im Widerspruch zu den bisherigen Grundlagen der Theorie des Farbensehens steht. Es soll in Kapitel 2 und 3 gezeigt werden.

- 1) In eine neue Theorie des Farbensehens lassen sich widerspruchsfrei neben den alten Annahmen 1 - 3 die neuen Annahmen 7 und 8 einbauen.
- 2) Die antagonistischen Buntfunktionen können als Lineartransformationen der Spektralwertfunktionen berechnet werden.

Das neue Verfahren zur Berechnung der antagonistischen Funktionen $\psi_i(\lambda)$ ($i = 2, 3$) soll besonders ausführlich dargestellt werden. Leser, die sich mehr für die praktischen Anwendungen interessieren, können die sehr mathematischen nächsten Hauptkapitel 2 und 3 überschlagen.

2. Antagonistische Funktionen des menschlichen Farbensehens

2.1 Unbunt- und Buntfunktionen als Funktion der Wellenlänge

Die Unbuntfunktion wird wie in der bisherigen Theorie des Farbensehens identifiziert mit der spektralen Hellempfindungskurve $V(\lambda)$ des Tagessehens. Es ist also

$$\psi_1(\lambda) = V(\lambda) \quad (2.1;1)$$

Die Unbuntfunktion ist eine Lineartransformation der Spektralwertfunktionen $r(\lambda)$, $g(\lambda)$, $b(\lambda)$.

Die Gelb-Blau- und Rot-Grün-Buntfunktionen sollen nach den Vorbetrachtungen in Kapitel 1.4 und 1.5 folgende Annahmen erfüllen:

1. Sie sollen Lineartransformationen der Rezeptorempfindlichkeiten sein

$$\psi_i(\lambda) = L_i [\alpha(\lambda), \beta(\lambda), \gamma(\lambda)] \quad (2.1;2)$$

2. Sie sollen Lineartransformationen der Spektralwertfunktionen sein

$$\psi_i(\lambda) = L_i [r(\lambda), g(\lambda), b(\lambda)] \quad (2.1;3)$$

3. a. Die Nullstellen der Gelb-Blau-Buntfunktion sollen λ_G (spektrales Urgrün) und λ_R^c ("spektrales" Urrot) sein

$$\psi_2(\lambda_G) = \psi_2(\lambda_R^c) = 0 \quad (2.1;4-5)$$

- b. Die Nullstellen der Rot-Grün-Buntfunktion sollen λ_Y (spektrales Urgelb) und λ_B (spektrales Urblau) sein

$$\psi_3(\lambda_Y) = \psi_3(\lambda_B) = 0 \quad (2.1;6-7)$$

4. Die Buntfunktionen $\psi_2(\lambda)$ und $\psi_3(\lambda)$ sind (nahezu) invariant für alle Strahlungsverteilungen $U_1(\lambda)$, $U_2(\lambda)$, ..., die als "Weiss" empfunden werden.
5. Die Sättigungssignale (Buntsignal/Unbuntsignal) $p_i(F)$ einer Infeldfarbe der Strahlungsverteilung $f(\lambda)$ werden durch das Umfeld beeinflusst und geändert. Die wegen des Umfeldeinflusses

geänderten Sättigungssignale (System *) werden durch die Gleichung

$$p_i^*(F) = p_i(F) - f(\delta) p_i(U) \quad (2.1;8)$$

mit

$$\begin{aligned} f(\delta) &= 1 & \text{für } \delta &= 0 \\ f(\delta) &= 0 & \text{für } \delta &= 1 \end{aligned} \quad (2.1;9-10)$$

beschrieben. Für Spektralfarben ($\delta = 1$) ändern sich wegen $f(\delta) = 0$ die Sättigungssignale nicht.

Punkt 4 und 5 steht im Gegensatz zu den Annahmen der bisherigen Theorie des Farbensehens.

Wir suchen zwei antagonistische Buntfunktionen, die Punkt 1 bis 5 erfüllen. Wir zeigen, dass mit diesen Annahmen die bisherigen Widersprüche zu experimentellen Ergebnissen behoben werden. Hierin liegt die Berechtigung und der Vorzug des neuen Schemas.

Die neue Theorie des Farbensehens soll deduktiv dargestellt werden. Schon am Anfang werden die antagonistischen Funktionen angegeben. Es wird diskutiert, was der Physiker messen würde, wenn unser Auge eine Bewertung nach diesen Funktionen vornehmen würde. Wenn möglichst viele Ergebnisse der experimentellen Farbenlehre mit den an den Anfang gestellten Funktionen berechenbar sind und durch die Theorie bestätigt werden, so sind die Funktionen offenbar gut gewählt. Natürlich wird die neue Theorie nicht alle experimentellen Ergebnisse beschreiben, aber wesentlich mehr als die bisherige.

Die experimentelle Bestimmung der spektralen Urfarben wurde durch Bunttonvergleich der von MIESCHER ermittelten Urfarben mit MUNSELL-Farben erreicht. Ist der Buntton in der Klassifikation des MUNSELL-Systems bestimmt, so kann die empfindungsgemäss buntongleiche Wellenlänge (etwa λ_Y) als Schnittpunkt der gekrümmten Kurve von Farben gleichen Bunttons mit dem Spektralfarbenzug

ermittelt werden. Gewisse Schwierigkeiten ergeben sich, da die spektralen Urfarbwellenlängen sich mit dem Helligkeitsverhältnis Infeld/Umfeld = $\psi_1(F)/\psi_1(U)$ ändern. Sie werden daher für Infeld gleich Umfeldhelligkeit (Value 5 des MUNSELL-Systems) bestimmt.

Für "spektrales" Urrot kann keine Streubreite in nm angegeben werden, da Urrot in der Nähe des Spektralendes liegt. Die beiden Grenzen werden daher gesondert angegeben.

Wir vereinbaren, die Wellenlängen λ^c (hier 494c) der "spektralen" Purpurfarben stets so zu bezeichnen, dass eine Mischung mit der Farbe der Wellenlänge λ (hier $\lambda = 494$) zu Lichtart E (energiegleiches Spektrum) möglich ist.

Zum Vergleich der eigenen Experimente werden einige Angaben aus der Literatur zusammengestellt.

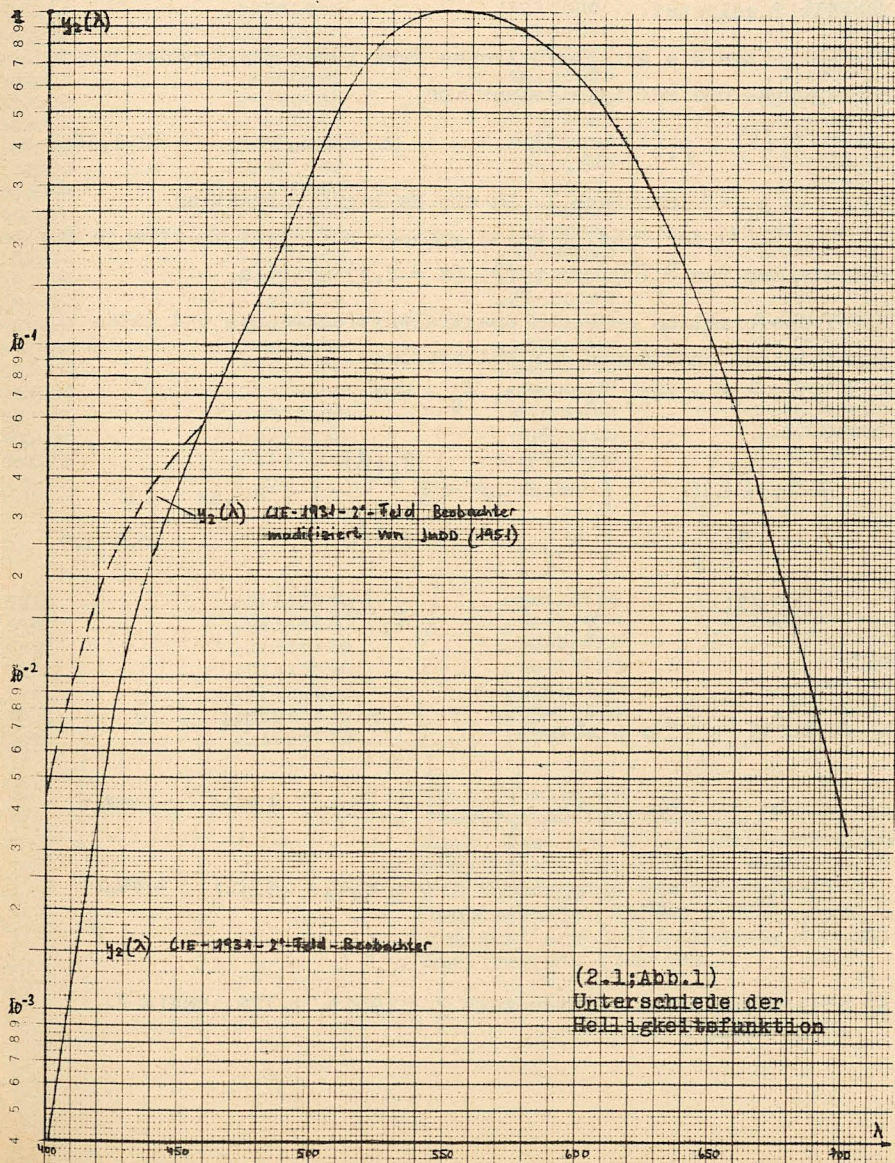
	Gelb Y	Rot R	Blau B	Grün G
HURVICH u. JAMESON ¹⁾	580	(Annahme: ~ 700 nm)	472	500
HASSENSTEIN ²⁾	575	(Annahme: 502 c)	474	502
Science of Color ³⁾	575	(Annahme: 521 c)	476	521
eigene Experimente	574 ± 3 nm	494c ⁶⁵⁰ 495c	475 ± 3 nm	503 ± 3 nm

(2.1; Tabelle 1)
Spektrale Urfarben
(Wellenlängenangaben in nm)

Die spektralen Wellenlängen der Urfarben können jeweils nur innerhalb bestimmter Fehlergrenzen bestimmt werden. Die folgenden antagonistischen Funktionen müssen daher neu berechnet werden, wenn die Urfarbwellenlängen genauer bekannt sind.

- 1) HURVICH und JAMESON, JOSA 45, 546-552 und 602-616 (1955).
- 2) HASSENSTEIN, Kybernetik 4, S.221, Abb.26 und Text.
- 3) Science of Color, Optical Society of America, Washington 1953 und 1963, S. 107 (wahrscheinlich Urfarblage ohne Umfeld)
- 4) Siehe Tabelle Wyszecki, Color Science (1967), S.436.

Die Aussagen und Folgerungen gelten also nur für einen Beobachter, der die Urfarben an den genannten Spektralstellen ermittelt. Im andern Fall ist mit kleinen Abweichungen zu rechnen. Die Buntfunktionen sind nach Punkt 2 Lineartransformationen der Spektralwertfunktionen. Wegen der bekannten Fehler der Helligkeitsfunktion $y_1(\lambda) = V(\lambda) = y_2(\lambda)$ am Spektralanfang des CIE-1931-2°-Feld-Beobachter werden die von JUDD-1951 modifizierten Spektralwertfunktionen benutzt⁴⁾.



Die Fehler der CIE-1951-Helligkeitsfunktion wurden durch die neuen 1955 2°-Feld Messungen von STILES und BURCH⁵⁾ bestätigt. In der Nähe von 460 nm ist mit geringen Fehlern zu rechnen, da die JUDD-Helligkeitsfunktion hier nicht genügend geglättet ist. Die Spektralwertfunktionen des JUDD-1951-Beobachters⁴⁾ sind in Tabelle 2 gelistet.

Wir schreiben die antagonistischen Funktionen als Produkt von Sättigungs- und Helligkeitsfunktion.

$$\psi_i(\lambda) = p_i(\lambda) \psi_1(\lambda) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.1; 10a)$$

Dann ist $p_1(\lambda)$ identisch 1. Da die Helligkeitsfunktion $\psi_1(\lambda) \equiv \bar{y}_2(\lambda)$ der Tabelle stets grösser Null ist, so stimmen die Nullstellen von $\psi_i(\lambda)$ und $p_i(\lambda)$ ($i = 2, 3$) überein.

Die Transformation zwischen Spektralwertfunktionen und antagonistischen Funktionen der Nullstellen

$\lambda_Y = 574, \lambda_R^c = 494, \lambda_B = 475, \lambda_G = 503$
lautet

$$\begin{pmatrix} \psi_1(\lambda) \\ \psi_2(\lambda) \\ \psi_3(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x}_2(\lambda) \\ \bar{y}_2(\lambda) \\ \bar{z}_2(\lambda) \end{pmatrix} \quad (2.1; 11)$$

mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .0 & 1.0000 & .0 \\ -.4139 & 1.4571 & -2.4046 \\ 2.9797 & -2.6662 & -.0960 \end{pmatrix}$$

5) Stiles und Burch, Optica Acta 2, (1955), p.178, Table 2, 2°-matching field.

λ	$\bar{x}_2(\lambda)$	$\bar{y}_2(\lambda)$	$\bar{z}_2(\lambda)$
400JUDD	.06110000	.00450000	.27990000
410JUDD	.12670000	.00930000	.58350000
420JUDD	.22850000	.01750000	1.06220000
430JUDD	.30810000	.02730000	1.45260000
440JUDD	.33120000	.03790000	1.60640000
450JUDD	.28880000	.04680000	1.47170000
460JUDD	.23230000	.06000000	1.28800000
470JUDD	.17450000	.09100000	1.11330000
480JUDD	.09200000	.13900000	.75520000
490JUDD	.03180000	.20800000	.44610000
500JUDD	.00480000	.32300000	.26440000
510JUDD	.00930000	.50300000	.15410000
520JUDD	.06360000	.71000000	.07630000
530JUDD	.16680000	.86200000	.04120000
540JUDD	.29260000	.95400000	.02000000
550JUDD	.43640000	.99500000	.00880000
560JUDD	.59700000	.99500000	.00390000
570JUDD	.76420000	.95200000	.00200000
580JUDD	.91590000	.87000000	.00160000
590JUDD	1.02250000	.75700000	.00110000
600JUDD	1.05440000	.63100000	.00070000
610JUDD	.99220000	.50300000	.00030000
620JUDD	.84320000	.38100000	.00020000
630JUDD	.63270000	.26500000	.00010000
640JUDD	.44040000	.17500000	0.00000000
650JUDD	.27870000	.10700000	0.00000000
660JUDD	.16190000	.06100000	0.00000000
670JUDD	.08580000	.03200000	0.00000000
680JUDD	.04590000	.01700000	0.00000000
690JUDD	.02220000	.00820000	0.00000000
700JUDD	.01130000	.00410000	0.00000000

 $\Sigma = 10.7533$ $\Sigma = 10.7526$ $\Sigma = 10.7531$

500C	.01230300	.00410800	.00563760
510C	.01316620	.00411490	.01048940
520C	.01370120	.00411920	.01349610
530C	.01413890	.00412280	.01595620
540C	.01468600	.00412710	.01903130
550C	.01565870	.00413500	.02449810
560C	.01830920	.00415620	.03939510

(2.1;Tabelle 2)

Spektralwertfunktionen $\bar{x}_2(\lambda)$, $\bar{y}_2(\lambda)$, $\bar{z}_2(\lambda)$ des 1931-CIE-2°-FeId-Beobachters modifiziert von JUDD⁴⁾, ergänzt mit den Komponenten der zu Lichtart E kompensativen Farben 500C,...560C ermisch aus Spektralanfang (400 nm) und Spektralende (700 nm).

Man überzeugt sich etwa durch zeichnen, dass die Nullstellen von $\psi_2(\lambda)$ und $\psi_3(\lambda)$ an den geforderten Stellen liegen. Die Funktionswerte sind in Tabelle 3 tabelliert.

λ	$\psi_1(\lambda)$	$\psi_2(\lambda)$	$\psi_3(\lambda)$	$p_2(\lambda) = \frac{\psi_2(\lambda)}{\psi_1(\lambda)}$	$p_3(\lambda) = \frac{\psi_3(\lambda)}{\psi_1(\lambda)}$
400JUDD	.00449999	-.69179062	.14318571	-153.73130000	31.81905700
410JUDD	.00929999	-1.44199660	.29670451	-155.05345000	31.90372200
420JUDD	.01749999	-2.62328390	.53221017	-149.90197000	30.41201800
430JUDD	.02729999	-3.58072190	.70577895	-131.16200000	25.85271500
440JUDD	.03789999	-3.94467190	.73157979	-104.08107000	19.30290100
450JUDD	.04679999	-3.59025050	.59444447	-76.71476500	12.70180600
460JUDD	.05999999	-3.10590050	.40853540	-51.76501300	6.80892400
470JUDD	.09099999	-2.61671880	.17042926	-28.75515200	1.87284900
480JUDD	.13900000	-1.65153250	-.16899144	-11.88152800	-1.21576570
490JUDD	.20800000	-.78280470	-.50266076	-3.76348410	-2.41663820
500JUDD	.32300000	-.16714431	-.87228426	-.51747464	-2.70057040
510JUDD	.50300000	.35849665	-1.32820880	.71271699	-2.64057410
520JUDD	.71000000	.82471690	-1.71085290	1.16157300	-2.40965190
530JUDD	.86200000	1.08788240	-1.80524520	1.26204450	-2.09425190
540JUDD	.95400000	1.22084650	-1.67365560	1.27971330	-1.75435590
550JUDD	.99500000	1.24800450	-1.35341280	1.25427580	-1.36021380
560JUDD	.99500000	1.19332070	-.87439939	1.19931720	-.87879335
570JUDD	.95199999	1.06603810	-.26135914	1.11978790	-.27453691
580JUDD	.86999999	.88473787	.40933507	1.01694000	.47050008
590JUDD	.75699999	.67717449	1.02830710	.89455019	1.35839770
600JUDD	.63099999	.48134446	1.45934590	.76282799	2.31275100
610JUDD	.50299999	.32154487	1.61532560	.63925422	3.21138290
620JUDD	.38099999	.20568958	1.49663940	.53986767	3.92818750
630JUDD	.26499999	.12402925	1.17870290	.46803492	4.44793560
640JUDD	.17500000	.07272018	.84567490	.41554388	4.83242800
650JUDD	.10700000	.04056177	.54515916	.37908196	5.09494540
660JUDD	.06099999	.02187621	.31977538	.35862655	5.24221950
670JUDD	.03199999	.01111646	.17033995	.34738947	5.32312360
680JUDD	.01700000	.00577370	.09144289	.33962952	5.37899350
690JUDD	.00819999	.00276013	.04428652	.33660123	5.40079640
700JUDD	.00409999	.00129729	.02273920	.31641281	5.54614840
500C	.00410799	-.01266258	.02516519	-3.08242140	6.12589960
510C	.00411489	-.02467664	.02725300	-5.99689960	6.62300520
520C	.00411919	-.03212184	.02854697	-7.79807790	6.93022310
530C	.00412279	-.03821341	.02960537	-9.26880150	7.18088950
540C	.00412709	-.04582809	.03092882	-11.10418900	7.49408280
550C	.00413499	-.05936486	.03328119	-14.35668000	8.04865690
560C	.00415619	-.09625293	.03969195	-23.15888000	9.55005860

$\Sigma = 10.7755$

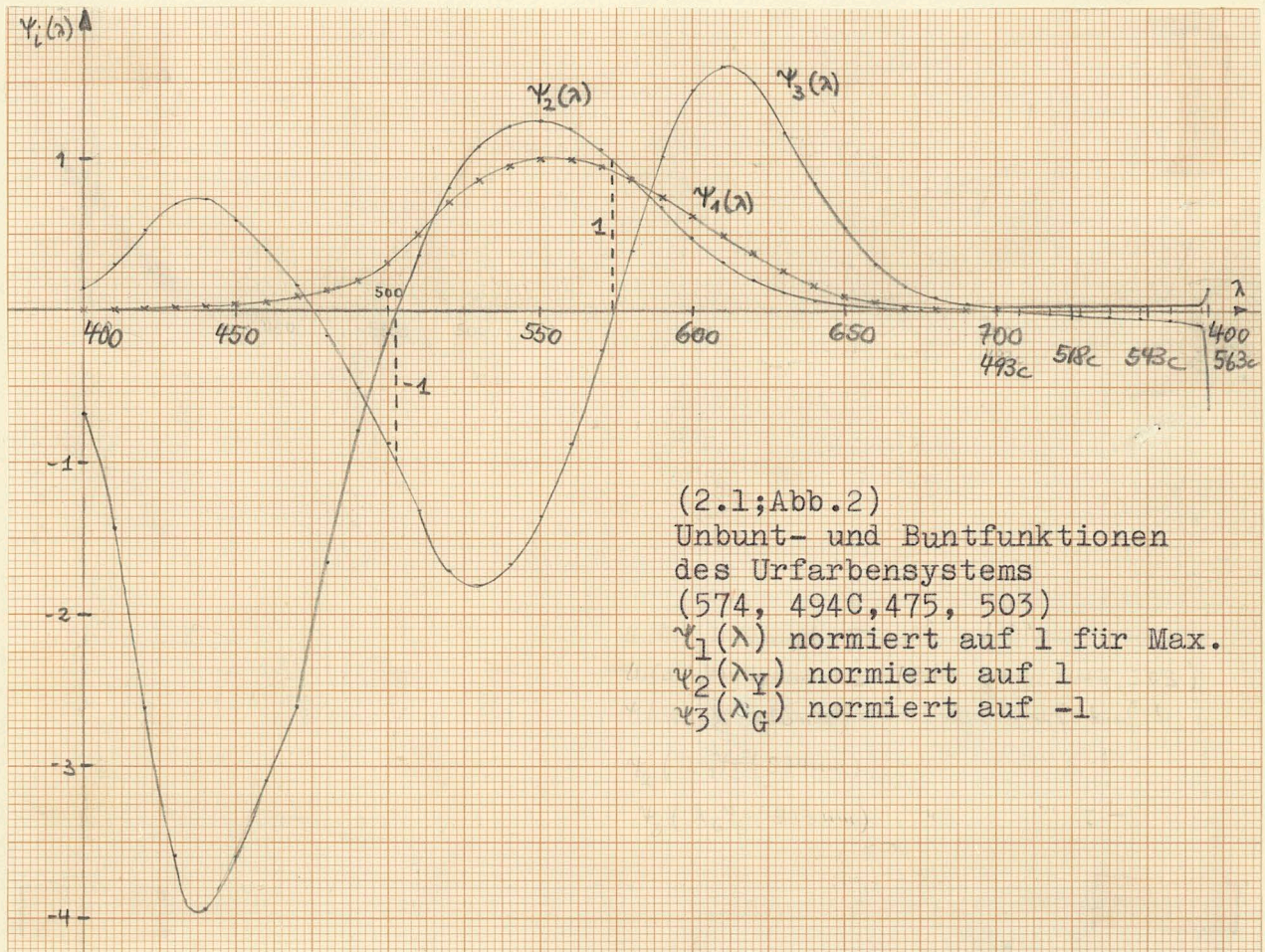
-14.6560

2.4733

(2.1; Tabelle 3)

Unbunt- und Buntfunktionen $\psi_i(\lambda)$ sowie Sättigungsfunktionen $p_i(\lambda)$ der energiegelichen Spektralfarben für das Urfarbsystem (574,494C,475,503)
Berechnet mit Gleichung (2.1;11)

Die Unbunt- und Buntfunktionen sind in Abbildung 2 dargestellt.



Für eine Spektralverteilung $U(\lambda)$ des Umfeldes sind diese Funktionen mit $U(\lambda)$ zu multiplizieren.

Für $U(\lambda) \equiv 1$ gilt

$$\int_{400}^{700} \psi_2(\lambda) d\lambda = -14.65 \neq 0$$

(2.1; 12-13)

$$\int_{400}^{700} \psi_3(\lambda) d\lambda = 2.47 \neq 0$$

Für $U(\lambda) = \text{Normlichtart C}$ gilt

$$\int_{400}^{700} \psi_2(\lambda) U(\lambda) d\lambda = -19.3 \neq 0$$

(2.1; 14-15)

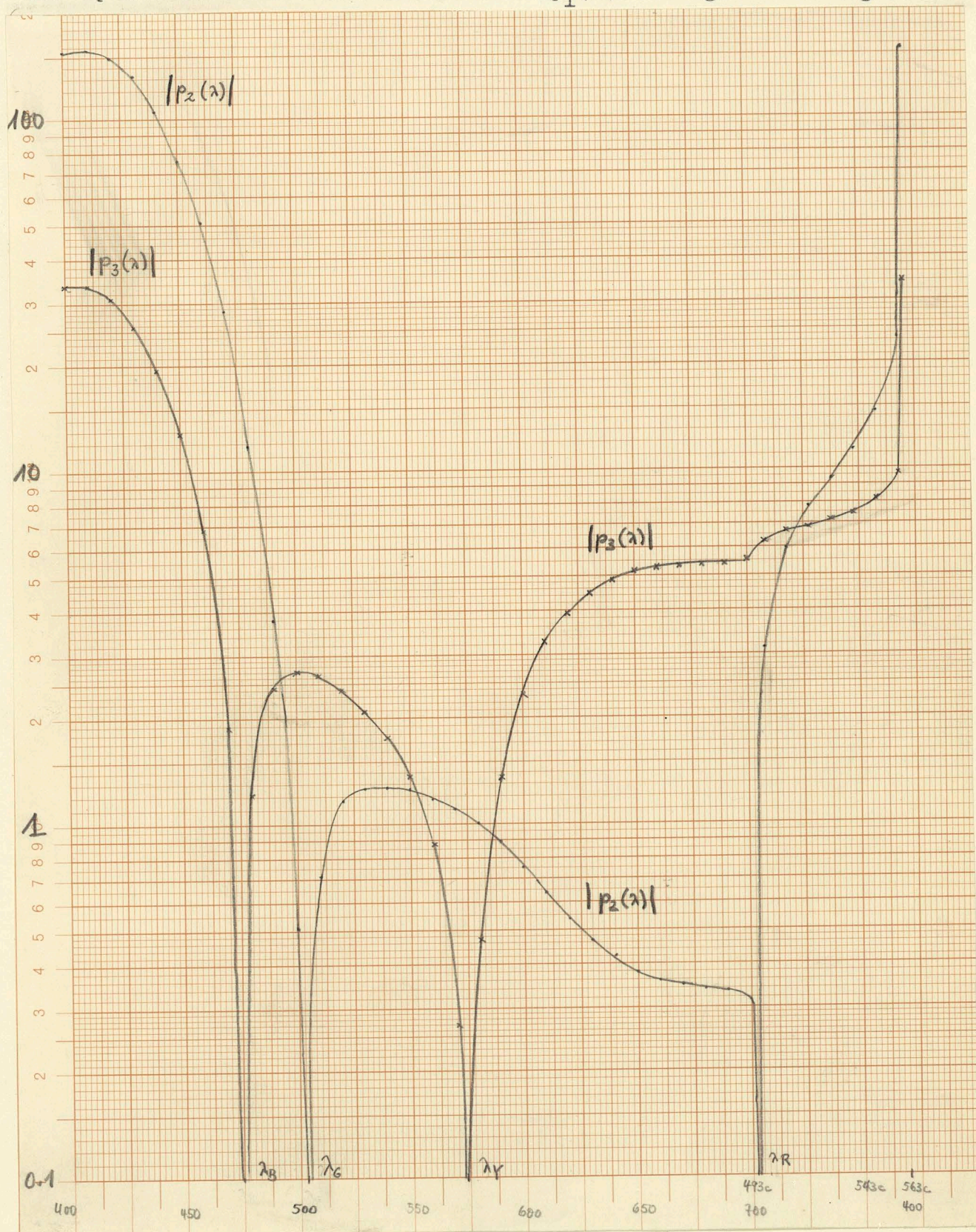
$$\int_{400}^{700} \psi_3(\lambda) U(\lambda) d\lambda = 1.56 \neq 0$$

Die Integrale über die Buntfunktionen sind im Gegensatz zur bisherigen Theorie verschieden von Null (vergl. Punkt 4).

Unabhängig von der Strahlungsverteilung des Umfeldes sind die Sättigungsfunktionen

$$p_i(\lambda) = \frac{\psi_i(\lambda) u(\lambda)}{\psi_1(\lambda) u(\lambda)} \frac{\delta(\lambda - \lambda')}{\delta(\lambda - \lambda')} \quad (2.1;16)$$

der Spektralfarben. Die Funktionen $|p_i(\lambda)|$ zeigt Abbildung 3.

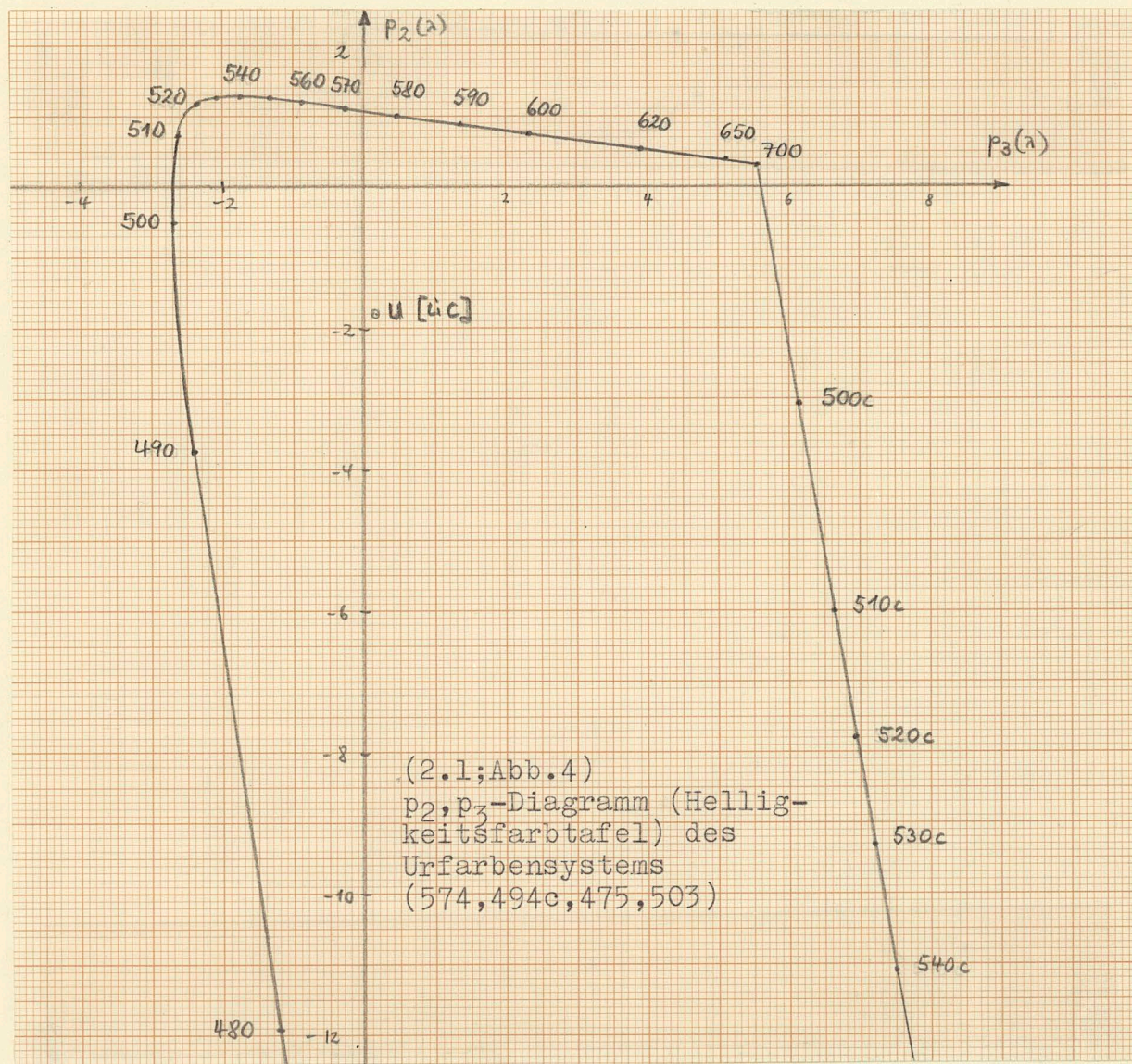


(2.1;Abb.3)

Sättigungsfunktionen $|p_i(\lambda)|$ des Urfarbensystems (574,494C,475,503).

Wir bezeichnen die Darstellung der Farben im p_2, p_3 -Diagramm als Helligkeitsfarbtafel, weil p_2 und p_3 die Buntsignale der Farben pro Helligkeitseinheit beschreiben.

Die numerischen Werte von p_2 und p_3 für die Spektralfarben fallen am blauen Spektralende unverhältnismässig gross aus. Wir zeichnen das Diagramm daher nur bis 480 nm und verzichten auf die Farborte der Spektralfarben am blauen Spektralende.



Wenn wir kurz unseren bisherigen Weg überblicken, so haben wir die Buntfunktionen angegeben. Sie wurden nach (2.1;11) berechnet. Die Ermittlung der Transformationskoeffizienten a_{ij} von (2.1;11) blieb allerdings unklar und wird erst später behandelt werden. Die Buntfunktionen erfüllen sicher die wichtigen am Anfang angeführten Punkte 2 und 3. Die Integrale über die Buntfunktionen sind im Gegensatz zur bisherigen Theorie verschieden von Null, sowohl für Lichtart E (Gl. 2.1;12-13) wie für Lichtart C (Gl. 2.1;14-15).

2.2 Grundhypothesen

Die im Folgenden zu entwickelnde Theorie des Farbensehens beruht auf folgenden Hypothesen:

Hypothese 1 Die Empfindlichkeit unseres Auges für Licht konstanter Energie $f(\lambda)$ im Wellenlängenintervall $d\lambda$ ist proportional den Unbunt- und Buntfunktionen $\Psi_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, 3$)

Hypothese 2 Im Auge entstehen Signale X_i der Grösse

$$X_i = \int_{400}^{700} \Psi_i(\lambda) f(\lambda) d\lambda \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.2;1)$$

für Licht der Energie $f(\lambda)$ im Intervall $d\lambda$.

Hypothese 3 Die Farbempfindungsmerkmale (z.B. gleicher Buntton, gleiche Buntkraft usw.) sind einfache Funktionen dieser Signale. Sie hängen normalerweise von den Infeldsignalen $X_i(F)$ und Umfeldsignalen $X_i(U)$ ab.

Weitere Hypothesen betreffen den Zusammenhang von experimentellen Ergebnissen mit den Bunt- und Unbuntfunktionen.

Hypothese 4 Die zur heterochromen Photometrie im Flimmerexperiment notwendige Energie $E(\lambda)$ ist für Spektralfarben umgekehrt proportional $\Psi_1(\lambda)$.

Hypothese 5 Die experimentell messbaren spektralen Urfarben in einer bestimmten Infeld-Umfeld-Situation sind die Nullstellen der Buntfunktionen $\Psi_2(\lambda)$ und $\Psi_3(\lambda)$.

Hypothese 6 Ändern die spektralen Urfarben ihre Lage, so ändert sich die Empfindlichkeit unseres Auges. Die Funktionen $\Psi_i(\lambda)$ müssen in diesem Fall neu berechnet werden.

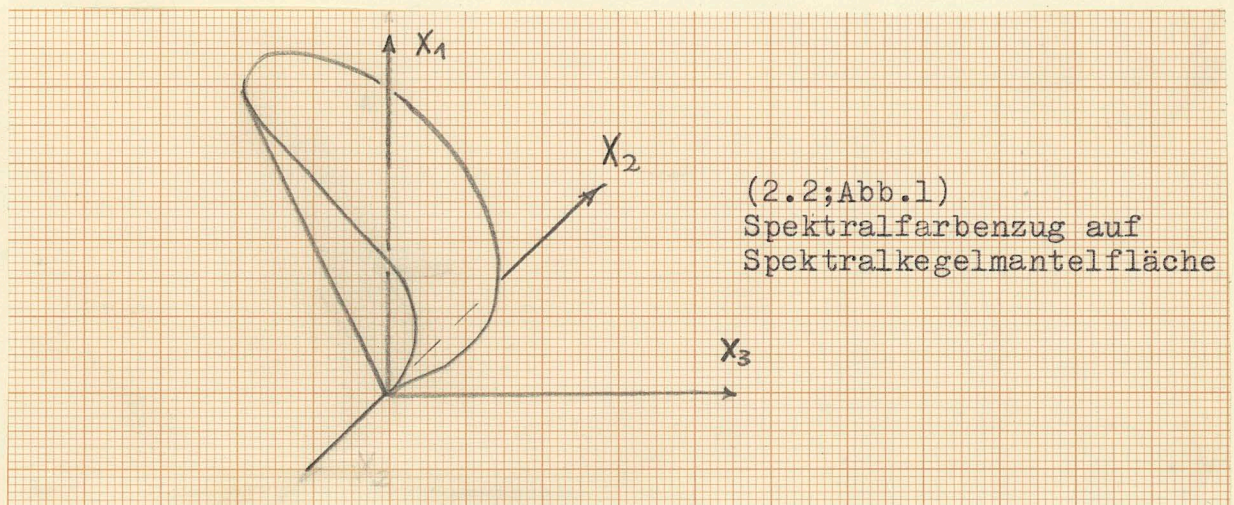
Bei nicht zu verschiedenen Umfeldern (z.B. Lichtart E und Lichtart C) bleibt experimentell die Lage der spektralen Urfarben nahezu invariant. Wir können daher in guter Näherung bei "weissen" Umfeldern die Empfindlichkeiten $\Psi_i(\lambda)$ als invariant ansehen.

2.3 Spektralfarbenzug und Spektralkegel

Fällt Licht der Energie $E(\lambda) = N$ aus dem Spektralintervall $d\lambda$ in unser Auge, so entstehen Signale \vec{x}_λ mit den Komponenten

$$x_i(\lambda) = N \psi_i(\lambda) \delta(\lambda - \lambda') \quad (i=1,2,3) \quad (2.3;1)$$

Die Spitzen dieser Ortsvektoren, dargestellt in einem kartesischen Raum (X_1, X_2, X_3) beschreiben eine räumliche Kurve, den sogenannten Spektralfarbenzug. Er liegt auf der Mantelfläche eines kegelähnlichen Körpers, den wir Spektralkegel nennen.



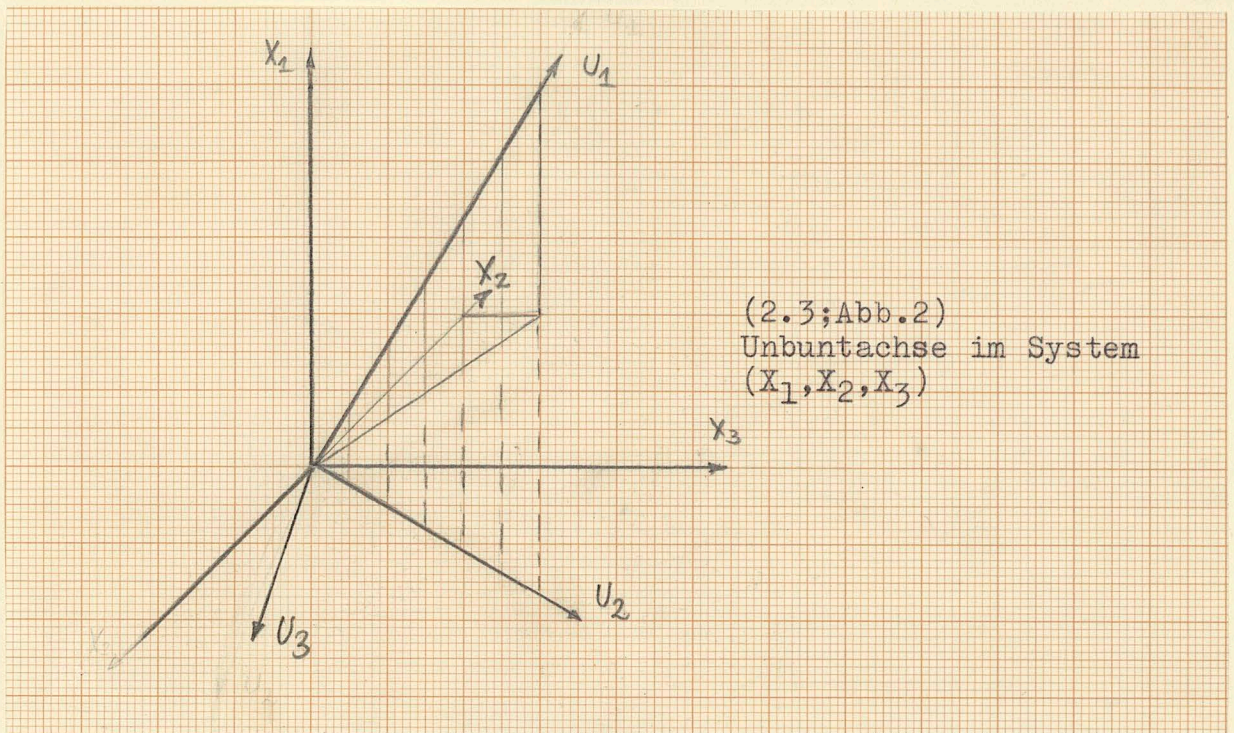
Fällt in unser Auge Licht eines Umfeldes der Strahlungsverteilung $U(\lambda)$, so entstehen die Signale

$$x_i(u) = \int_{400}^{700} u(\lambda) \psi_i(\lambda) d\lambda \quad (i=1,2,3) \quad (2.3;2)$$

Wird dieses Licht als Unbunt empfunden, so wollen wir die durch den Unbuntvektor

$$\vec{u} = [x_1(u), x_2(u), x_3(u)] \quad (2.3;3)$$

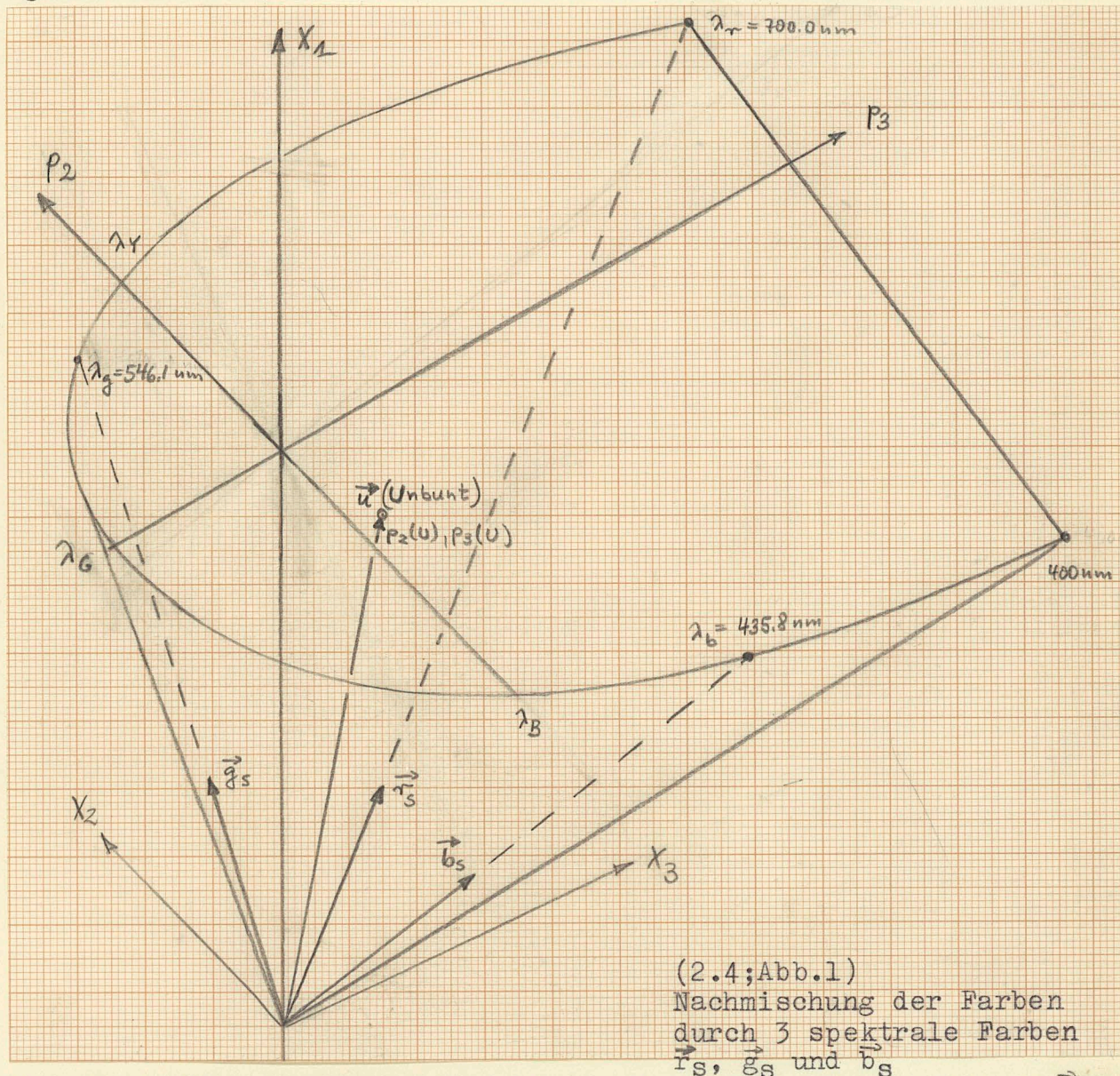
festgelegte Achse als Unbuntachse bezeichnen.



Die Unbuntachse wird in den folgenden Betrachtungen eine wesentliche Rolle spielen. Wir führen daher ein neues kartesisches Koordinatensystem (U_1, U_2, U_3) ein. Das System soll wie in (2.3; Abb. 2) dargestellt mit dem System (X_1, X_2, X_3) zusammenhängen. Zwischen den Koordinaten beider Systeme besteht eine lineare Transformation.

2.4 Nachmischung der Spektralfarben, Spektralwertfunktionen

Zur Nachmischung von Farben wählt man willkürlich 3 verschiedene Spektralfarben, etwa Rot, Grün und Blau der Wellenlängen λ_r , λ_g und λ_b aus.



Ihre Einheiten werden so festgelegt, dass sie zusammen Unbunt \vec{u} ergeben. Es gilt

$$\vec{u} = E_r \vec{r}_s + E_g \vec{g}_s + E_b \vec{b}_s \quad (2.4;1)$$

Als Unbunt wählt man willkürlich das energiegleiche Spektrum $E(\lambda) \equiv 1$. Für die Komponenten von Unbunt gilt

$$\begin{aligned} u_i &= \int_{400}^{700} \psi_i(\lambda) E(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{400}^{700} \psi_i(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (2.4;2)$$

Sämtliche Komponenten von Unbunt sind verschieden von Null. Im Urfarbsystem (574, 494c, 475, 503) gilt für Lichtart C

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (u_1, u_2, u_3) \\ &= (10.78, -19.3, 1.56) \end{aligned} \quad (2.4;3)$$

Für die Sättigungskoordinaten gilt

$$\begin{aligned} \vec{p} &= [p_1(u), p_2(u), p_3(u)] \\ &= (1.0000, -1.791, .1425) \end{aligned} \quad (2.4;4)$$

Die Komponenten der Spektralfarben \vec{r}_s , \vec{g}_s und \vec{b}_s haben die Form

$$\begin{aligned} r_i &= p_i(\lambda_r) \psi_i(\lambda_r) \delta(\lambda_r - \lambda') \\ g_i &= p_i(\lambda_g) \psi_i(\lambda_g) \delta(\lambda_g - \lambda') \\ b_i &= p_i(\lambda_b) \psi_i(\lambda_b) \delta(\lambda_b - \lambda') \end{aligned} \quad (2.4;5-7)$$

Zur Berechnung von E_r , E_g und E_b (vergl. Gl. 2.4;1) muss daher gelten

$$\begin{aligned} u_1 &= E_r r_1 + E_g g_1 + E_b b_1 \\ u_2 &= E_r r_2 + E_g g_2 + E_b b_2 \\ u_3 &= E_r r_3 + E_g g_3 + E_b b_3 \end{aligned} \quad (2.4;8-10)$$

Wir führen folgende Determinanten ein

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_1 & g_1 & b_1 \\ r_2 & g_2 & b_2 \\ r_3 & g_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad (2.4;11)$$

$$\Delta_{ru} = \begin{vmatrix} u_1 & g_1 & b_1 \\ u_2 & g_2 & b_2 \\ u_3 & g_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad (2.4;12)$$

und entsprechend für Δ_{gu} und Δ_{bu}

Die Lösungen E_r , E_g , E_b lauten dann

$$E_r = \frac{\Delta_{ru}}{\Delta}, \quad E_g = \frac{\Delta_{gu}}{\Delta}, \quad E_b = \frac{\Delta_{bu}}{\Delta} \quad (2.4;13-15)$$

Zur Nachmischung von Unbunt gilt daher

$$\vec{u} = \frac{\Delta_{ru}}{\Delta} \vec{r}_s + \frac{\Delta_{gu}}{\Delta} \vec{g}_s + \frac{\Delta_{bu}}{\Delta} \vec{b}_s \quad (2.4;16)$$

Wir definieren

$$\vec{r} = \frac{\Delta_{ru}}{\Delta} \vec{r}_s, \quad \vec{g} = \frac{\Delta_{gu}}{\Delta} \vec{g}_s, \quad \vec{b} = \frac{\Delta_{bu}}{\Delta} \vec{b}_s \quad (2.4;17-19)$$

Dann gilt

$$\vec{u} = 1 \cdot \vec{r} + 1 \cdot \vec{g} + 1 \cdot \vec{b} \quad (2.4;20)$$

Die mit dieser Gleichung eingeführten Vektoren heissen Primärvektoren.

Gesucht sind nun die Anteile $r(\lambda)$, $g(\lambda)$ und $b(\lambda)$ an Primärvektoren zur Nachmischung der Spektralfarben \vec{s}_λ

$$\vec{s}_\lambda = r(\lambda) \vec{r} + g(\lambda) \vec{g} + b(\lambda) \vec{b} \quad (2.4;21)$$

Die Komponenten von \vec{s}_λ lauten

$$\vec{s}_\lambda = (1, p_2(\lambda), p_3(\lambda)) \cdot \psi_1(\lambda) \delta(\lambda - \lambda') \quad (2.4;22)$$

Wir setzen

$$s_i = \psi_1(\lambda) p_i(\lambda) \delta(\lambda - \lambda') \quad (i=1,2,3) \quad (2.4;23)$$

Aus den Gleichungen (2.4;17-19) und (2.4;21) folgt

$$\vec{s}_\lambda = r(\lambda) \frac{\Delta r_n}{\Delta} \vec{r}_s + g(\lambda) \frac{\Delta g_n}{\Delta} \vec{g}_s + b(\lambda) \frac{\Delta b_n}{\Delta} \vec{b}_s \quad (2.4;24)$$

und in Komponenten ergibt sich

$$s_1 = r(\lambda) \frac{\Delta r_n}{\Delta} r_1 + g(\lambda) \frac{\Delta g_n}{\Delta} g_1 + b(\lambda) \frac{\Delta b_n}{\Delta} b_1 \quad (2.4;25-27)$$

$$s_2 = r(\lambda) \frac{\Delta r_n}{\Delta} r_2 + g(\lambda) \frac{\Delta g_n}{\Delta} g_2 + b(\lambda) \frac{\Delta b_n}{\Delta} b_2$$

$$s_3 = r(\lambda) \frac{\Delta r_n}{\Delta} r_3 + g(\lambda) \frac{\Delta g_n}{\Delta} g_3 + b(\lambda) \frac{\Delta b_n}{\Delta} b_3$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\Delta^+ = \begin{vmatrix} \frac{\Delta r_n}{\Delta} r_1 & \dots & \frac{\Delta b_n}{\Delta} b_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\Delta r_n}{\Delta} r_3 & \dots & \frac{\Delta b_n}{\Delta} b_3 \end{vmatrix} = \frac{\Delta r_n \cdot \Delta g_n \cdot \Delta b_n}{\Delta^2} \quad (2.4;28)$$

und

$$\Delta_{rs}^+ = \begin{vmatrix} s_1 & \frac{\Delta g_n}{\Delta} g_1 & \frac{\Delta b_n}{\Delta} b_1 \\ s_2 & \frac{\Delta g_n}{\Delta} g_2 & \frac{\Delta b_n}{\Delta} b_2 \\ s_3 & \frac{\Delta g_n}{\Delta} g_3 & \frac{\Delta b_n}{\Delta} b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\Delta g_n \cdot \Delta b_n \cdot \Delta r_s}{\Delta^2} \quad (2.4;29)$$

Entsprechende Abkürzungen gelten für Δ_{gs}^+ und Δ_{bs}^+ . Dann folgt für die Lösungen

$$r(\lambda) = \frac{\Delta_{rs}^+}{\Delta^+} = \frac{\Delta_{rs}}{\Delta_{rn}} \quad (2.4;30-32)$$

$$g(\lambda) = \frac{\Delta_{gs}^+}{\Delta^+} = \frac{\Delta_{gs}}{\Delta_{gn}}$$

$$b(\lambda) = \frac{\Delta_{bs}^+}{\Delta^+} = \frac{\Delta_{bs}}{\Delta_{bn}}$$

Diese Funktionen heissen Spektralwertfunktionen. Sie werden vom Physiker gemessen, wenn nach der Halbfeldmethode jede Spektralfarbe durch 3 Primärfarben nachgemischt wird. Die Wellenlängenwahl und Eichung der Primärfarben ist willkürlich. Man wählte in den Experimenten die Wellenlängen $\lambda_r = 700.0$ nm, $\lambda_g = 546.1$ nm und $\lambda_b = 435.8$ nm. Zur Festlegung der Einheiten wurde die Nachmischung von Unbunt der Lichtart E benutzt (Gl. 2.4;1)

Wir fragen, ob die theoretischen Ergebnisse mit den experimentellen übereinstimmen.

Es gilt

$$E_r = \frac{\Delta_{rn}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} u_1 & g_1 & b_1 \\ u_2 & g_2 & b_2 \\ u_3 & g_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_1 & g_1 & b_1 \\ r_2 & g_2 & b_2 \\ r_3 & g_3 & b_3 \end{vmatrix}} \quad (2.4;33)$$

Mit den Transformationsgleichungen (2.1;11) folgt

$$E_r = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}\bar{x}_2(u) + a_{12}\bar{y}_2(u) + a_{13}\bar{z}_2(u) & \dots & a_{11}\bar{x}_2(\lambda_b) + a_{12}\bar{y}_2(\lambda_b) + a_{13}\bar{z}_2(\lambda_b) \\ a_{21}\bar{x}_2(u) + a_{22}\bar{y}_2(u) + a_{23}\bar{z}_2(u) & \dots & a_{21}\bar{x}_2(\lambda_b) + a_{22}\bar{y}_2(\lambda_b) + a_{23}\bar{z}_2(\lambda_b) \\ a_{31}\bar{x}_2(u) + a_{32}\bar{y}_2(u) + a_{33}\bar{z}_2(u) & \dots & a_{31}\bar{y}_2(\lambda_b) + a_{32}\bar{y}_2(\lambda_b) + a_{33}\bar{z}_2(\lambda_b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}\bar{x}_2(\lambda_r) + a_{12}\bar{y}_2(\lambda_r) + a_{13}\bar{z}_2(\lambda_r) & \dots & a_{11}\bar{x}_2(\lambda_b) + a_{12}\bar{y}_2(\lambda_b) + a_{13}\bar{z}_2(\lambda_b) \\ a_{21}\bar{x}_2(\lambda_r) + a_{22}\bar{y}_2(\lambda_r) + a_{23}\bar{z}_2(\lambda_r) & \dots & a_{21}\bar{x}_2(\lambda_b) + a_{22}\bar{y}_2(\lambda_b) + a_{23}\bar{z}_2(\lambda_b) \\ a_{31}\bar{x}_2(\lambda_r) + a_{32}\bar{y}_2(\lambda_r) + a_{33}\bar{z}_2(\lambda_r) & \dots & a_{31}\bar{x}_2(\lambda_b) + a_{32}\bar{y}_2(\lambda_b) + a_{33}\bar{z}_2(\lambda_b) \end{vmatrix}} \quad (2.4;34)$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} x_2(u) & x_2(\lambda_g) & x_2(\lambda_b) \\ y_2(u) & y_2(\lambda_g) & y_2(\lambda_b) \\ z_2(u) & z_2(\lambda_g) & z_2(\lambda_b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2(\lambda_r) & x_2(\lambda_g) & x_2(\lambda_b) \\ y_2(\lambda_r) & y_2(\lambda_g) & y_2(\lambda_b) \\ z_2(\lambda_r) & z_2(\lambda_g) & z_2(\lambda_b) \end{vmatrix}} \quad (2.4;35)$$

Die Gleichung für E_r hat im System (X_1, X_2, X_3) die gleiche Form wie im System (X, Y, Z) . Einsetzen für die Wellenlängen $\lambda_r, \lambda_g, \lambda_b$ und für U liefert die Werte für E_r, E_g und E_b . Es ergibt sich

$$E_{r \text{ theor.}} = 73.04 \quad E_{g \text{ theor.}} = 1.40 \quad E_{b \text{ theor.}} = 1.00 \quad (2.4;36-38)$$

Zum Vergleich werden die Experimentellen Werte angegeben

$$E_{r \text{ exp.}} = 73.0420 \quad E_{g \text{ exp.}} = 1.3971 \quad E_{b \text{ exp.}} = 1.0000 \quad (2.4;39-41)$$

Wir erhalten:

Die aus den Unbunt- und Buntfunktionen berechneten Eichkonstanten der Spektralvektoren zur Festlegung der Primärvektoren stimmen mit den experimentellen Ergebnissen überein.

Die Uebereinstimmung ist für jedes beliebige Primärtrippel gesichert, da nach der bisherigen Theorie die Eichkonstanten die Form der Gleichung (2.4;35) haben, welche aus der Darstellung mit den Unbunt- und Buntfunktionen (2.4;33) hervorgeht.

Für die Spektralwertfunktion $r(\lambda)$ gilt nach (2.4;30)

$$r(\lambda) = \frac{\Delta_{rs}}{\Delta_{ru}} = \frac{\begin{vmatrix} s_1 & g_1 & b_1 \\ s_2 & g_2 & b_2 \\ s_3 & g_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u_1 & g_1 & b_1 \\ u_2 & g_2 & b_2 \\ u_3 & g_3 & b_3 \end{vmatrix}} \quad (2.4;42)$$

Mit den Transformationsgleichungen (2.1;11) folgt wie zwischen (2.4;33) und (2.4;35):

$$r(\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} x_2(\lambda) & x_2(\lambda_g) & x_2(\lambda_b) \\ y_2(\lambda) & y_2(\lambda_g) & y_2(\lambda_b) \\ z_2(\lambda) & z_2(\lambda_g) & z_2(\lambda_b) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2(u) & x_2(\lambda_g) & x_2(\lambda_b) \\ y_2(u) & y_2(\lambda_g) & y_2(\lambda_b) \\ z_2(u) & z_2(\lambda_g) & z_2(\lambda_b) \end{vmatrix}} \quad (2.4;43)$$

Die Spektralwertfunktionen $r(\lambda)$ und entsprechend $y(\lambda)$ und $b(\lambda)$ haben im System (X_1, X_2, X_3) die gleiche Form wie im System (X, Y, Z) .

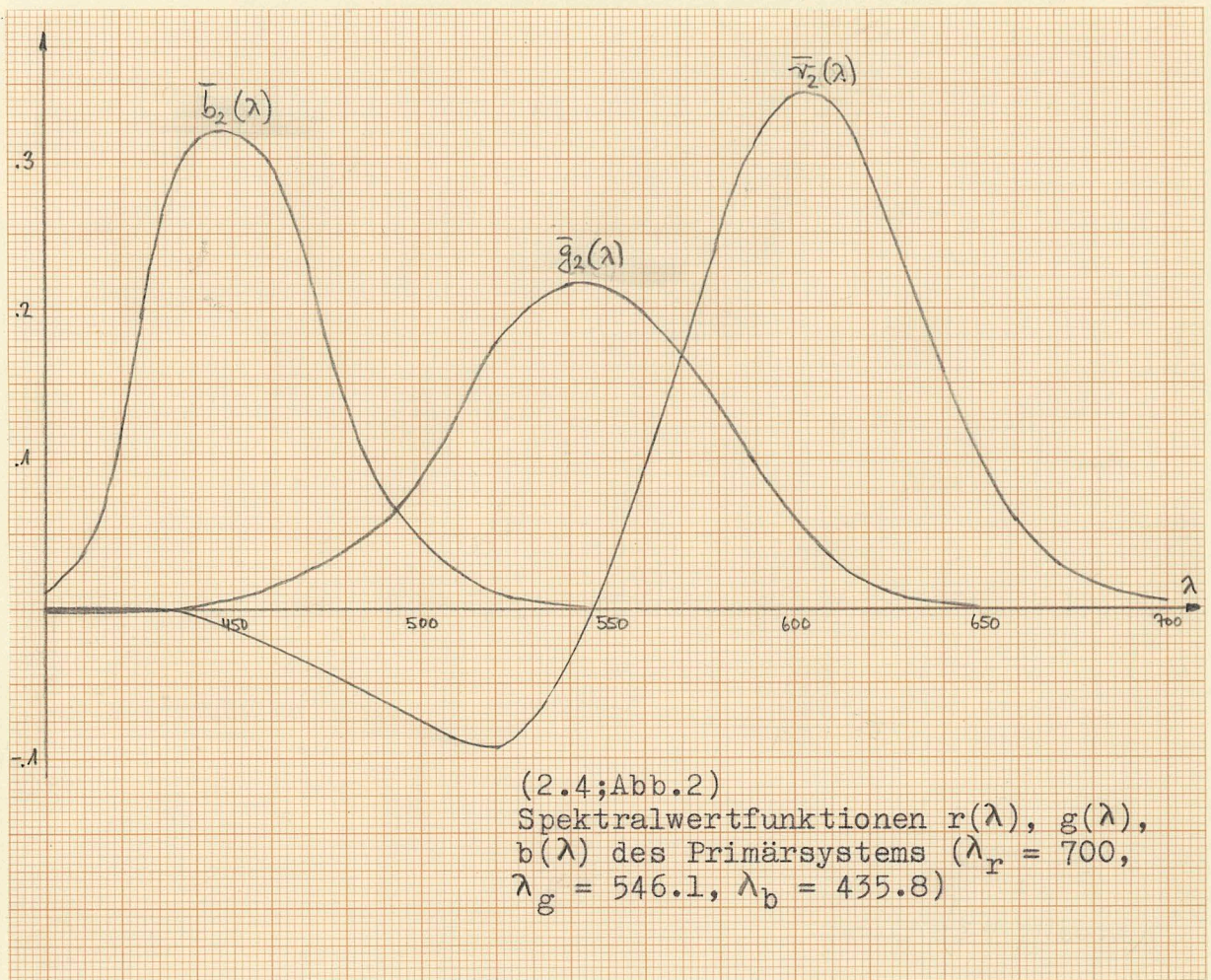
Einsetzen der Werte für die Wellenlängen λ_r , λ_g , λ_b und für u liefert die Funktionen

$$\begin{pmatrix} r(\lambda) \\ g(\lambda) \\ b(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .4183 & -.1586 & -.0828 \\ -.0911 & .2524 & .0157 \\ .0009 & -.0026 & .1787 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2(\lambda) \\ y_2(\lambda) \\ z_2(\lambda) \end{pmatrix} \quad (2.4;44)$$

Das sind aber genau die Funktionen der bisherigen Theorie. Die Uebereinstimmung ist für jedes Primärtrippel beliebiger Wellenlängen λ_r , λ_g und λ_b gesichert, da nach der bisherigen Theorie die Spektralwertfunktionen eine Form entsprechend Gleichung (2.4;43) besitzen und diese mit der neuen Darstellung (2.4;42) äquivalent ist. Es folgt das wichtige Ergebnis:

Die aus den Unbunt- und Buntfunktionen berechneten Spektralwertfunktionen stimmen mit den in Nachmischexperimenten erzielten Ergebnissen überein.

Die Spektralwertfunktionen $r(\lambda)$, $g(\lambda)$, $b(\lambda)$ sind in Abb.2 dargestellt.



2.5 Schwerpunktsfarbtafel

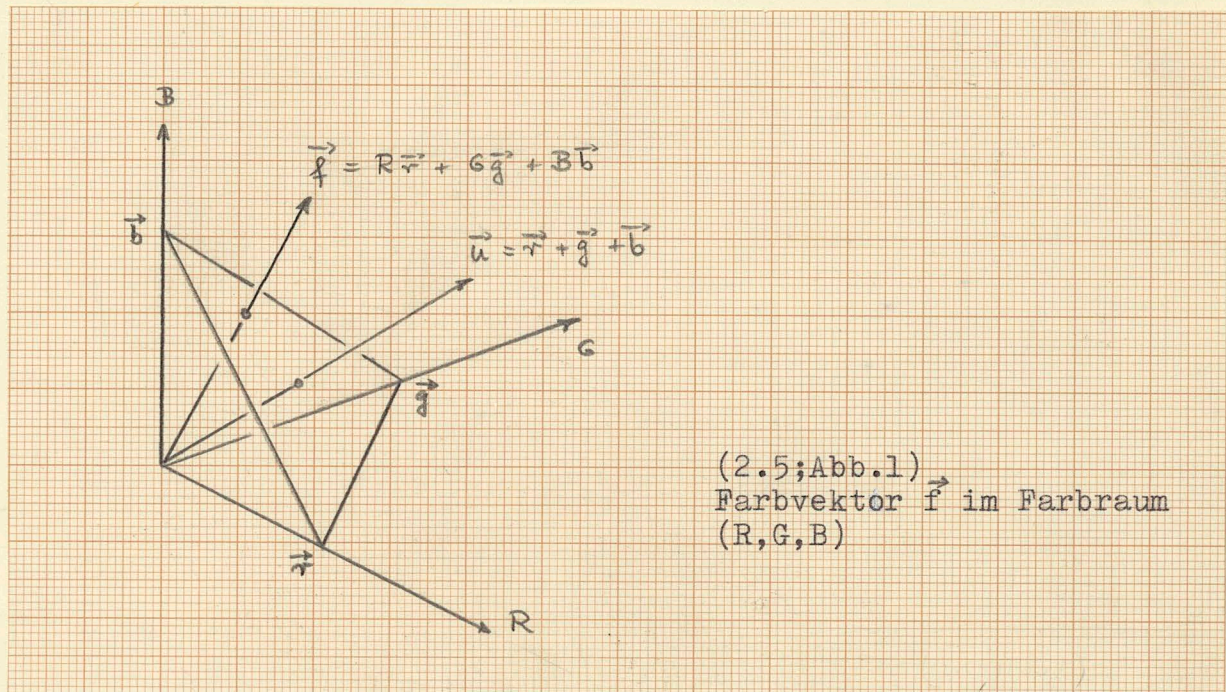
Wenn wir die Gleichung (2.4;21), nämlich

$$\vec{s}_\lambda = r(\lambda) \vec{r} + g(\lambda) \vec{g} + b(\lambda) \vec{b} \quad (2.5;1)$$

betrachten, so erkennen wir, dass wir die Spektralwertfunktionen $r(\lambda)$, $g(\lambda)$ und $b(\lambda)$ als Komponenten von \vec{s}_λ in Bezug auf das Primärtrippel \vec{r} , \vec{g} und \vec{b} deuten können. Wir schreiben daher die obige Gleichung in der Form

$$\vec{s}_\lambda = R_\lambda \vec{r} + G_\lambda \vec{g} + B_\lambda \vec{b} \quad (2.5;2)$$

R_λ , G_λ und B_λ sind die Komponenten von \vec{s}_λ im Farbenraum (R, G, B) . Es ist üblich, ein rechtwinkliges Koordinatensystem zu wählen und jede Farbe als Vektor mit den Komponenten R , G , B zu kennzeichnen.



Als Komponenten einer beliebigen Farbe der Strahlungsverteilung $f(\lambda)$ ergeben sich

$$R = \int_{400}^{700} r(\lambda) f(\lambda) d\lambda \quad (2.5;3-5)$$

$$G = \int_{400}^{700} g(\lambda) f(\lambda) d\lambda$$

$$B = \int_{400}^{700} b(\lambda) f(\lambda) d\lambda$$

Neben der Kennzeichnung der Farben durch 3 Komponenten wird vorwiegend in der Lichttechnik die Beschreibung einer Farbe durch nur 2 Koordinaten bevorzugt. Man kennzeichnet die Farben durch 2 von der Intensität unabhängige Koordinaten.

Variiert man die absolute Intensität $f(\lambda)$ einer Farbe, so entspricht dies einer Längenänderung des Farbvektors. Der Schnittpunkt des Farbvektors mit der Ebene $R + G + B = 1$ wird als Farbort in der sogenannten Schwerpunktsfarbtafel bezeichnet. Der Farbort wird durch zwei der 3 Koordinaten

$$r = \frac{R}{R + G + B} \quad (2.5;6-8)$$

$$g = \frac{G}{R + G + B}$$

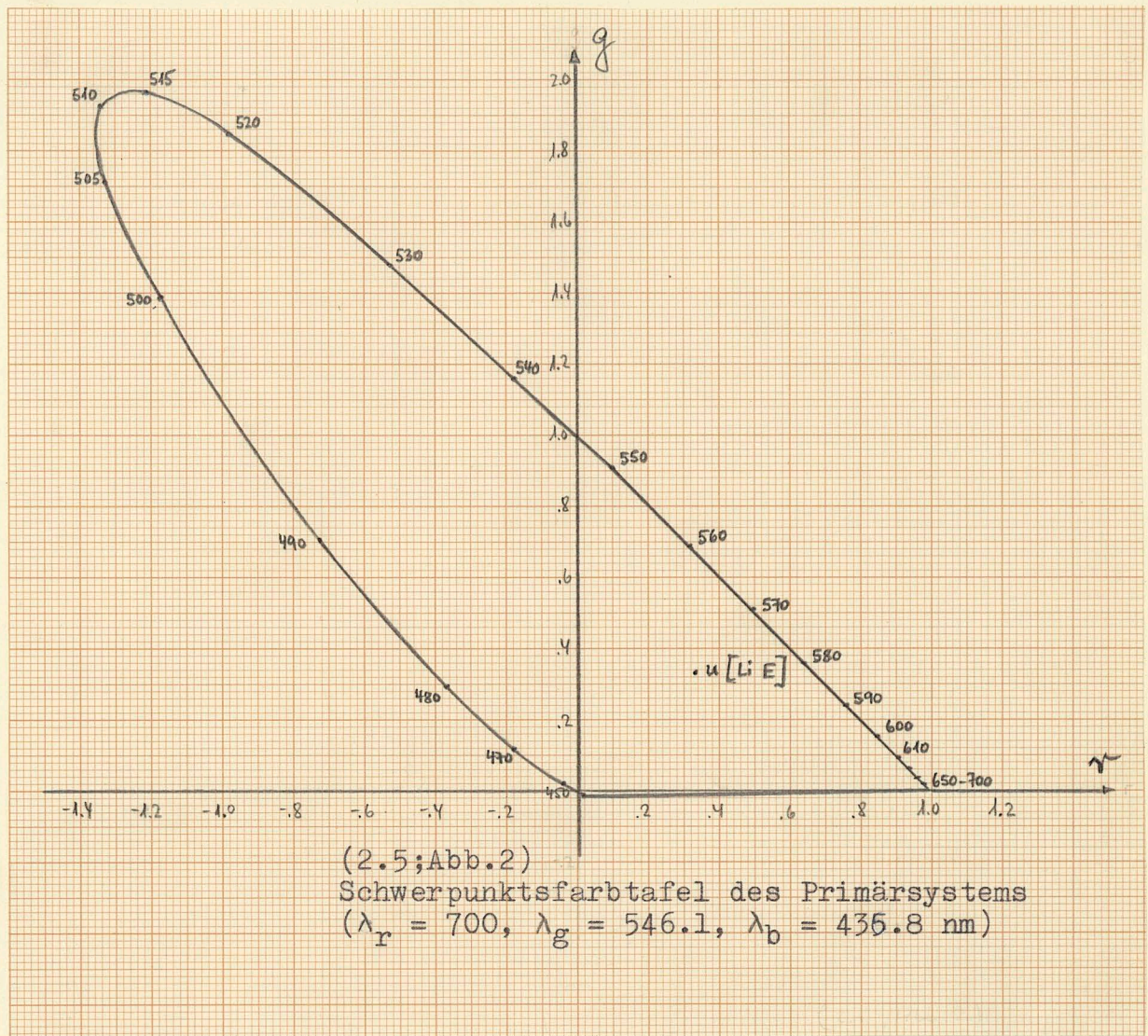
$$b = \frac{B}{R + G + B}$$

gekennzeichnet. Es gilt stets

$$r + g + b = 1 \quad (2.5;9)$$

Man hat vereinbart, r und g in einem rechtwinkligen Diagramm aufzutragen und nennt das entstehende Diagramm Farbtafel.

Allen Orten im Innern der Farbtafel entsprechen reelle Farben. Die Farborte der Spektralfarben und die "spektralen" Purpurfarben, die durch Mischung des roten und blauen Spektralendes entstehen, begrenzen das reelle Farbgebiet eindeutig. Als rotes und blaues Spektralende werden diejenigen Wellenlängen angesehen, wo die Helligkeitsfunktion (Unbuntfunktion) auf etwa $1/100$ ihres Maximalwertes abgesunken ist.



Die Farbtafel hat eine grosse Bedeutung zur Darstellung der Gesetze der Farbmischung. Gegeben seien zwei Farben \vec{f}_1 und \vec{f}_2 mit den Komponenten (R_1, G_1, B_1) und (R_2, G_2, B_2) . Für die Mischfarben \vec{f} aus \vec{f}_1 und \vec{f}_2 gilt

$$\vec{f} = \alpha \vec{f}_1 + \beta \vec{f}_2 \quad (2.5; 10)$$

Der Farbort von \vec{f}_1 hat die Koordinaten

$$(r_1, g_1) = \left(\frac{R_1}{R_1 + G_1 + B_1}, \frac{G_1}{R_1 + G_1 + B_1} \right) \quad (2.5; 11)$$

Entsprechendes gilt für (r_2, g_2) .

Der Farbort der Mischfarbe \vec{f} hat die Koordinaten

$$(r, g) = \left(\frac{\alpha R_1 + \beta R_2}{\alpha(R_1 + G_1 + B_1) + \beta(R_2 + G_2 + B_2)}, \frac{\alpha G_1 + \beta G_2}{\alpha(R_1 + G_1 + B_1) + \beta(R_2 + G_2 + B_2)} \right) \quad (2.5;12)$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$m_1 = R_1 + G_1 + B_1 \quad (2.5;13-14)$$

$$m_2 = R_2 + G_2 + B_2$$

so gilt für den Farbort der Mischfarbe \vec{f}

$$(r, g) = \left(\frac{\alpha m_1 r_1 + \beta m_2 r_2}{\alpha m_1 + \beta m_2}, \frac{\alpha m_1 g_1 + \beta m_2 g_2}{\alpha m_1 + \beta m_2} \right) \quad (2.5;15)$$

Vergleicht man diese Formel mit der Schwerpunktsformel zweier Massen, so sieht man sofort, dass der Farbort der Mischfarbe im Schwerpunkt der Farborte der Einzelfarben liegt, wenn man sich an den Farborten der Einzelfarben die Masse αm_1 und βm_2 denkt.

Wegen dieser Eigenschaft bezeichnet der Physiker die Farbtabel (2.5;Abb.2) als Schwerpunktsfarbtabel.

Wegen der Gültigkeit der Schwerpunktsformel (2.5;15) liegt der Farbort einer Mischfarbe auf der Verbindungslinie der Farborte der Einzelfarben.

Die Spektralwertfunktionen $r(\lambda)$, $g(\lambda)$, $b(\lambda)$ und damit die Farbkoordinaten R , G und B transformieren sich nach (2.4;30-32) und (2.5;3-5) beim Uebergang von einem Primärtrippel der Wellenlängen λ_r , λ_g , λ_b auf ein neues Primärtrippel der Wellenlängen λ'_r , λ'_g , λ'_b linear. Die Wahl des Primärtrippels ist willkürlich. Man hat sich international geeinigt, die Spektralwertfunktionen des Systems $\lambda_r = 700.0$, $\lambda_g = 546.1$ und $\lambda_b = 435.8$ noch linear zu transformieren, um negative Funktionswerte

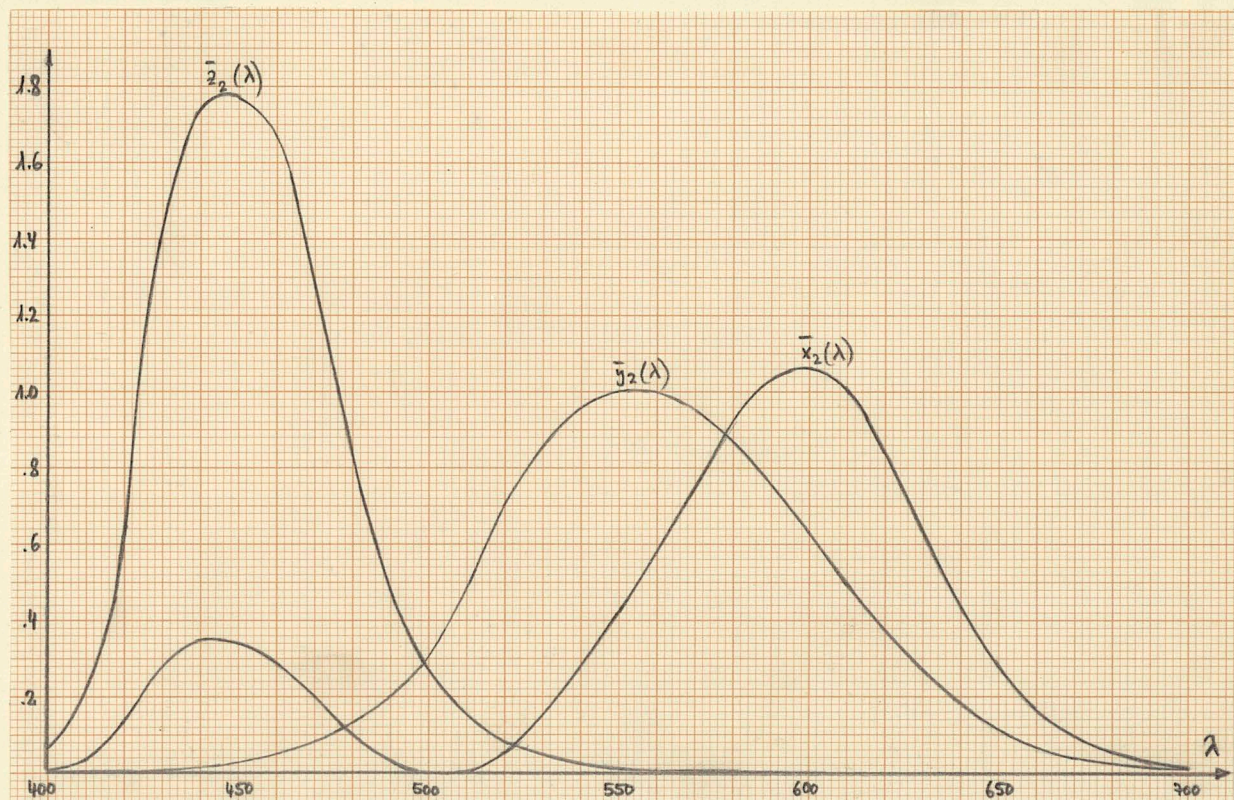
von $r(\lambda)$, $g(\lambda)$ und $b(\lambda)$ zu vermeiden. Durch die Transformation

$$\begin{pmatrix} x_2(\lambda) \\ y_2(\lambda) \\ z_2(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.769 & 1.752 & 1.130 \\ 1.000 & 4.590 & .060 \\ .000 & .057 & 5.592 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(\lambda) \\ g(\lambda) \\ b(\lambda) \end{pmatrix} = (b_{ij}) \begin{pmatrix} r(\lambda) \\ g(\lambda) \\ b(\lambda) \end{pmatrix} \quad (2.5;16)$$

wurde das heute überall benutzte sogenannte CIE-System festgelegt. Die Transformationskoeffizienten b_{2j} wurden so gewählt, dass $y_2(\lambda)$ die Helligkeits- oder Unbuntfunktion $\psi_1(\lambda)$ ergibt. Es gilt daher

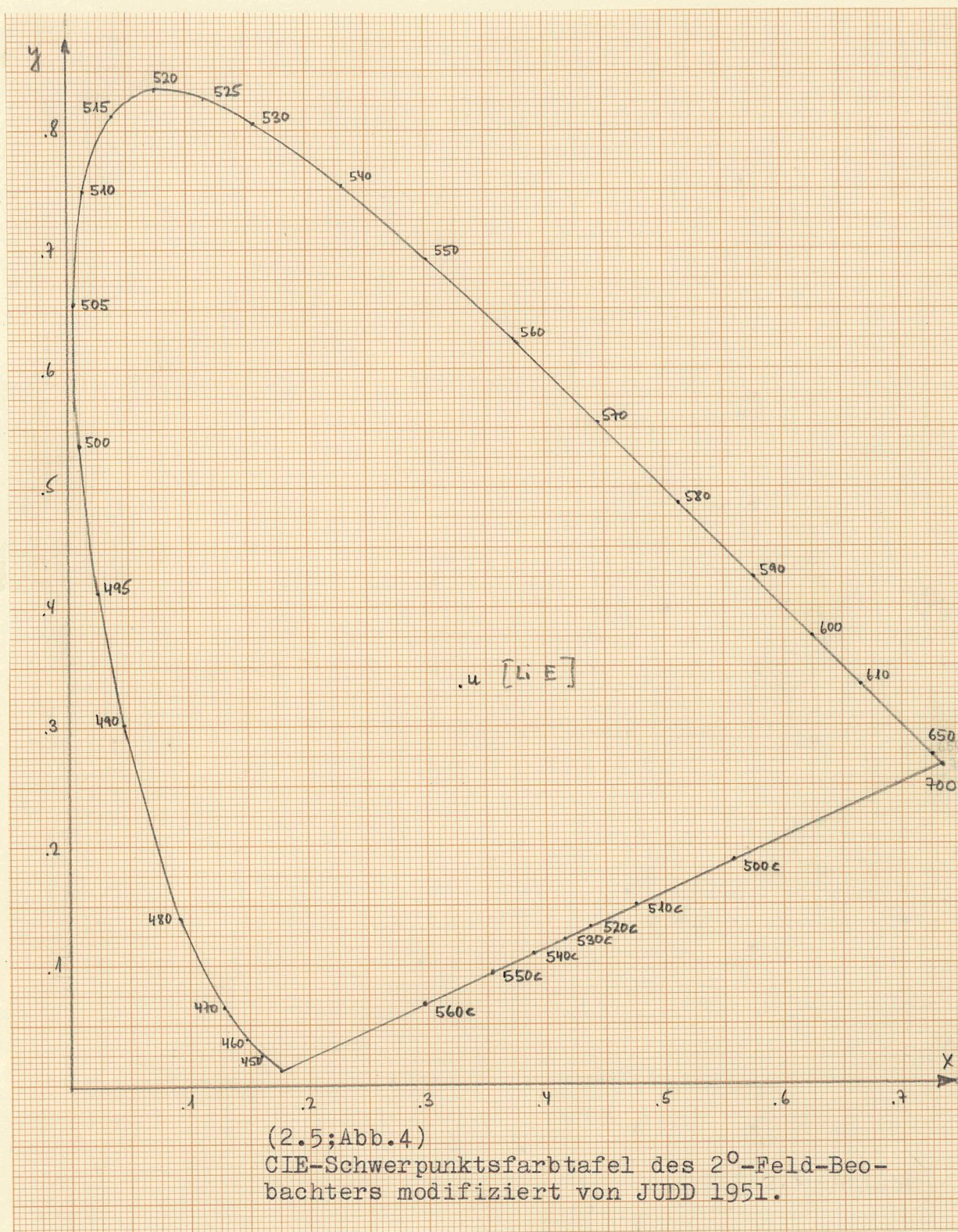
$$\psi_1(\lambda) \equiv y_2(\lambda) \quad (2.5;17)$$

Die Bestimmung dieser Funktion wird uns im nächsten Kapitel beschäftigen. Die Funktionen $x_2(\lambda)$, $y_2(\lambda)$ und $z_2(\lambda)$ sowie die zum System (X,Y,Z) gehörige Schwerpunktsfarbtafel zeigen Abb. 3 und 4.



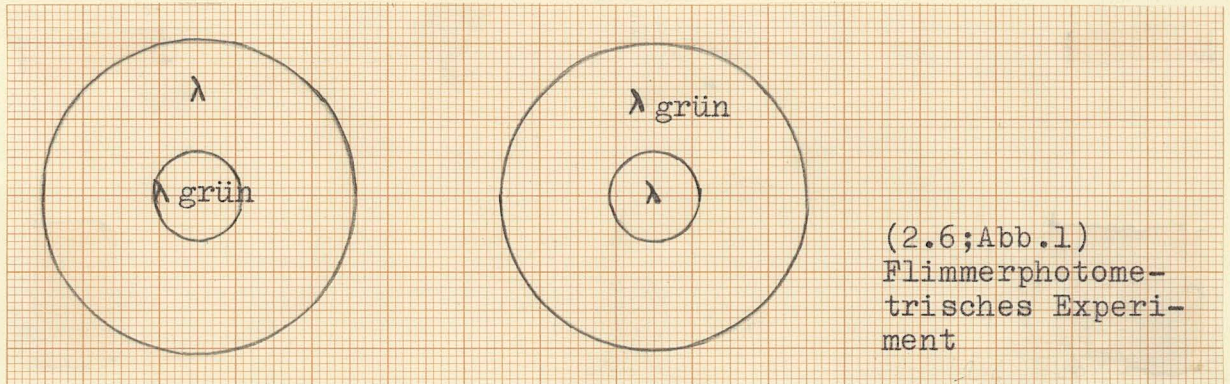
(2.5;Abb.3)

CIE-Spektralwertfunktionen des 2°-Feld-Beobachters modifiziert von JUDD 1951.



2.6 Flimmerphotometrisches Experiment

Dem Auge werden zwei verschiedene Spektralfarben im In- und Umfeld dargeboten. Durch ein rotierendes Prismensystem werden In- und Umfeld etwa 20 mal pro Sekunde vertauscht.



Unser Auge hat die Eigenschaft, dass in der Nähe dieser Frequenz Bunttonunterschiede zweier Farben (z.B. gelb und grün) nicht mehr wahrgenommen werden, aber noch ein unbuntes Hell-dunkel-Flimmern sichtbar ist. Die Intensität $E(\lambda)$ der Spektralfarbe λ wird so lange variiert, bis kein Hell-dunkel-Flimmern mehr sichtbar ist. Es zeigt sich, dass die Energien der Flimmergrenzen additiv und transitiv ausfallen.

$$1. \text{ Vor: } E(\lambda_1) \longleftrightarrow^*) E(\lambda_2) \quad (2.6; 1)$$

dann gilt experimentell

$$E(\lambda_1) + E(\lambda_3) \longleftrightarrow E(\lambda_2) + E(\lambda_3) \quad (\text{Additivität}) \quad (2.6; 2)$$

$$2. \text{ Vor: } E(\lambda_1) \longleftrightarrow E(\lambda_2) \text{ und } E(\lambda_2) \longleftrightarrow E(\lambda_3) \quad (2.6; 3-4)$$

dann gilt experimentell

$$E(\lambda_1) \longleftrightarrow E(\lambda_3) \quad (\text{Transitivität}) \quad (2.6; 5)$$

Wegen dieser experimentellen Eigenschaften lassen sich die Energien $E(\lambda)$ für alle Spektralfarben bestimmen, bei der die Flimmergrenze verschwindet. Die Energie einer meist grünen Vergleichsfarbe wählt man willkürlich gleich eins.

Nach Kapitel 2.2, Hypothese 4, wird angenommen, dass die

*) \longleftrightarrow bedeutet: Bei der Wahl der Energie $f(\lambda_1)$ der Spektralfarbe λ_1 und der Energie $f(\lambda_2)$ der Spektralfarbe λ_2 besteht kein oder minimales Hell-dunkel-Flimmern.

Energien $E(\lambda)$ der Spektralfarben im flimmerphotometrischen Experiment umgekehrt proportional $\psi_1(\lambda) \delta(\lambda - \lambda')$ ausfallen.

Es gilt nach willkürlicher Festsetzung der unbestimmten Konstanten für eine grüne Wellenlänge zu 1:

$$\psi_1(\lambda) = \frac{C_g}{E(\lambda)_{\text{Flimmerexperiment}}} \quad (2.6;6)$$

$$\text{mit } C_g = E(\lambda_g)_{\text{Flimmerexperiment}}$$

Man definiert diese Funktion als Flimmerhelligkeit der Spektralfarben und bezeichnet sie mit $V(\lambda)$ oder $\bar{y}_2(\lambda)$. Es gilt

$$\psi_1(\lambda) = V(\lambda) = \bar{y}_2(\lambda) \quad (2.6;7)$$

Es zeigt sich, dass sich diese Funktion als Lineartransformation der experimentellen Spektralwertfunktionen darstellen lässt.

Es gilt

$$\bar{y}_2(\lambda) = L_R r(\lambda) + L_G g(\lambda) + L_B b(\lambda) \quad (2.6;8)$$

Die drei experimentell bestimmbaren Konstanten L_R , L_G und L_B heissen Helligkeitsbeiwerte der Primärfarben \vec{r} , \vec{g} und \vec{b} . Es gilt

$$\begin{aligned} L_R &= 1.000 \\ L_G &= 4.590 \\ L_B &= .060 \end{aligned} \quad (2.6;9-11)$$

Die Konstanten b_{2j} der Gleichung (2.5;16) wurden gleich diesen Konstanten gewählt.

Es gilt

$$\begin{aligned} b_{21} &= L_R = 1.000 \\ b_{31} &= L_G = 4.590 \\ b_{31} &= L_B = .060 \end{aligned} \quad (2.6;12-14)$$

Die zweite Funktion des CIE-Spektralwertfunktionensystems $(\bar{x}_2(\lambda), \bar{y}_2(\lambda), \bar{z}_2(\lambda))$ ist daher die Helligkeits- oder Unbuntfunktion.

Es wird allgemein angenommen, dass im flimmerphotometrischen Experiment eine der drei für das Farbensehen wesentlichen Koordinaten gemessen wird. Die Messung der Spektralwertfunktionen und das flimmerphotometrische Experiment sind zwei wesentliche Informationsquellen, die quantitativ über die Verarbeitung der ins Auge fallenden Strahlung berichten.

Der lineare Zusammenhang von Flimmerhelligkeit und Spektralwertfunktionen (Gleichung 2.6;8) ist experimentell immer wieder bestätigt worden. Allerdings erreicht der Fehler der Helligkeitsbeiwerte L_R , L_G und L_B bei verschiedenen Versuchspersonen meist mehr als 25%. Die Spektralwertfunktionen sind stark abhängig von den Infeld-Umfeld-Größenverhältnissen im Nachmischexperiment. Das wirkt sich auf die Konstanten L_R , L_G und L_B aus.

3. Aenderung der antagonistischen Funktionen unter Adaptations- einfluss.

3.1 Spektralwertfunktionen bei Aenderung der antagonistischen Funktionen

Im letzten Kapitel kamen wir zu dem Ergebnis, dass die aus den Funktionen $\psi_i(\lambda)$ berechenbaren Spektralwertfunktionen und Helligkeitsbeiwerte mit den experimentellen Ergebnissen übereinstimmen. Unsere an den Anfang gestellten Funktionen $\psi_i(\lambda)$ und die zugehörige Theorie beschreiben die Nachmischexperimente richtig.

Wir wollen jetzt die Fragestellung etwas weiter fassen: Wie fallen die Ergebnisse der Nachmischexperimente (Spektralwertfunktionen $r(\lambda)$, $g(\lambda)$, $b(\lambda)$) aus, falls sich die Empfindlichkeiten $\psi_i(\lambda)$ ändern. Es sollen sich die geänderten Empfindlichkeiten $\psi_i'(\lambda)$ (' Koordinaten) als Lineartransformation der alten darstellen lassen.

$$\begin{pmatrix} \psi_1'(\lambda) \\ \psi_2'(\lambda) \\ \psi_3'(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(\lambda) \\ \psi_2(\lambda) \\ \psi_3(\lambda) \end{pmatrix} \quad (3.1;1)$$

Wir vermuten, dass solche Aenderungen unter Adaptationseinfluss (Anpassung der Empfindlichkeiten unseres Auges an bunte Umfelder) möglich sind.

Nun gilt experimentell der sogenannte KRIES'sche Persistenzsatz:

Die Spektralwertfunktionen im Bereich des normalen Tagessehens (keine Blendung) fallen nahezu unabhängig vom (bunten) Umfeld und Adaptationszustand aus. Gleichaussehende (normalerweise metamere) Farben ergeben keine Verschiedenheit bei beliebigen Umfeldern (und damit verschiedener Adaptation).

Wir werden zeigen, dass Änderungen nach (3.1;1) mit $c_{ij} \neq 0$ keine messbaren Änderungen der Spektralwertfunktionen bewirken. Wir behaupten mit anderen Worten:

Beh.:

Unter Lineartransformationen der Empfindlichkeiten $\psi_i(\lambda)$ unseres Auges bleiben die messbaren Spektralwertfunktionen $r(\lambda)$, $g(\lambda)$ und $b(\lambda)$ invariant.

Der Beweis dieser Behauptung ist in unserer Theorie die mathematische Formulierung des experimentell ermittelten KRIES'schen Persistenzsatzes.

Beweis:

Entsprechend Kapitel 2.4 gelten bei Adaptation an ein Umfeld U' mit der Strahlungsverteilung $U'(\lambda)$ die Gleichungen

$$\vec{u}' = E_r' \vec{r}'_s + E_g' \vec{g}'_s + E_b' \vec{b}'_s \quad (3.1;2)$$

$$= \vec{r}' + \vec{g}' + \vec{b}' \quad (3.1;3)$$

Für die Komponenten von u' gilt

$$u'_i = \int_{\lambda_{00}}^{\lambda_{100}} \psi_i'(\lambda) u'(\lambda) d\lambda \quad (3.1;4)$$

und für die Komponenten von r'

$$r'_i = \psi_i'(\lambda_r) \delta(\lambda_r - \lambda') \quad (3.1;5)$$

Entsprechende Gleichungen gelten für die Komponenten von \vec{g}' und \vec{b}' .

Gesucht sind wieder die Anteile $r'(\lambda)$, $g'(\lambda)$ und $b'(\lambda)$ zur Nachmischung der Spektralfarben \vec{s}'_λ aus den Primärfarben \vec{r}' , \vec{g}' und \vec{b}' .

$$\vec{s}'_\lambda = r'(\lambda) \cdot \vec{r}' + g'(\lambda) \vec{g}' + b'(\lambda) \vec{b}' \quad (3.1;6)$$

Die Lösungen lauten (vergl. 2.4;30-32)

$$r'(\lambda) = \frac{\Delta_{rs}'}{\Delta_{ru}'} \quad (3.1;7)$$

und entsprechend für $g'(\lambda)$ und $b'(\lambda)$.

Es ist

$$\Delta'_{rs} = \begin{vmatrix} \psi'_1(\lambda) \delta(\lambda - \lambda') & \psi'_1(\lambda_g) \delta(\lambda_g - \lambda') & \psi'_1(\lambda_b) \delta(\lambda_b - \lambda') \\ \psi'_2(\lambda) \delta(\lambda - \lambda') & \psi'_2(\lambda_g) \delta(\lambda_g - \lambda') & \psi'_2(\lambda_b) \delta(\lambda_b - \lambda') \\ \psi'_3(\lambda) \delta(\lambda - \lambda') & \psi'_3(\lambda_g) \delta(\lambda_g - \lambda') & \psi'_3(\lambda_b) \delta(\lambda_b - \lambda') \end{vmatrix} \quad (3.1;8)$$

$$\Delta'_{ru} = \begin{vmatrix} u'_1 & \psi'_1(\lambda_g) \delta(\lambda_g - \lambda') & \psi'_1(\lambda_b) \delta(\lambda_b - \lambda') \\ u'_2 & \psi'_2(\lambda_g) \delta(\lambda_g - \lambda') & \psi'_2(\lambda_b) \delta(\lambda_b - \lambda') \\ u'_3 & \psi'_3(\lambda_g) \delta(\lambda_g - \lambda') & \psi'_3(\lambda_b) \delta(\lambda_b - \lambda') \end{vmatrix} \quad (3.1;9)$$

$$\text{Wegen } \psi'_i(\lambda) \delta(\lambda - \lambda') = \sum_j c_{ij} \psi_j(\lambda) \delta(\lambda - \lambda') \quad (3.1;10)$$

folgt weiter

$$\Delta'_{rg} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \psi_1(\lambda) \delta(\lambda - \lambda') & \psi_1(\lambda_g) \delta(\lambda_g - \lambda') & \psi_1(\lambda_b) \delta(\lambda_b - \lambda') \\ \psi_2(\lambda) \delta(\lambda - \lambda') & \psi_2(\lambda_g) \delta(\lambda_g - \lambda') & \psi_2(\lambda_b) \delta(\lambda_b - \lambda') \\ \psi_3(\lambda) \delta(\lambda - \lambda') & \psi_3(\lambda_g) \delta(\lambda_g - \lambda') & \psi_3(\lambda_b) \delta(\lambda_b - \lambda') \end{vmatrix} \quad (3.1;11)$$

$$\Delta'_{ru} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 & \psi_1(\lambda_g) \delta(\lambda_g - \lambda') & \psi_1(\lambda_b) \delta(\lambda_b - \lambda') \\ u_2 & \psi_2(\lambda_g) \delta(\lambda_g - \lambda') & \psi_2(\lambda_b) \delta(\lambda_b - \lambda') \\ u_3 & \psi_3(\lambda_g) \delta(\lambda_g - \lambda') & \psi_3(\lambda_b) \delta(\lambda_b - \lambda') \end{vmatrix} \quad (3.1;12)$$

Einsetzen in (3.1;7) ergibt*)

$$r'(\lambda) = \frac{\det(c_{ij})}{\det(c_{ij})} \frac{\Delta_{rs}}{\Delta_{ru}} \quad (3.1;13)$$

$$= r(\lambda) \quad (3.1;14)$$

Entsprechende Gleichungen gelten für $g'(\lambda)$ und $b'(\lambda)$. Damit haben wir unsere Behauptung bewiesen.

Unter Lineartransformationen der Empfindlichkeiten unseres Auges

$$\psi'_i(\lambda) = \sum_j c_{ij} \psi_j(\lambda) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.1;15)$$

bleiben die gemessenen Spektralwertfunktionen $r(\lambda)$, $g(\lambda)$ und $b(\lambda)$ invariant. Es gilt

$$r'(\lambda) = \frac{\Delta'_{rs}}{\Delta'_{ru}} = \frac{\Delta_{rs}}{\Delta_{ru}} = r(\lambda) \quad (3.1;16)$$

und entsprechend für $g'(\lambda)$ und $b'(\lambda)$.

Im nächsten Kapitel sollen physikalisch sinnvolle Empfindlichkeitsänderungen ausgewählt und die Möglichkeit ihrer experimentellen Bestimmung diskutiert werden.

*) $\det(AB) = \det A \det B$, vergl. z.B. Schmeidler, W.: Determinanten und Matrizen, S.22-23.

3.2 Berechnung der antagonistischen Signale aus den Spektralwertfunktionen, Flimmerhelligkeit und Urfarblage im Spektrum

Bei Aenderung des Umfeldes U treten experimentell folgende Empfindungsänderungen einer Infeldfarbe F auf.

1. Bunttonänderungen (Rote Infeldfarbe kann in grüne übergehen!)
2. Buntkraftänderungen (Infeldfarbe wird weisslicher oder gesättigter)
3. Helligkeitsänderungen (Farben werden dunkler (vergrauter) oder heller (leuchtender)).

Wir wollen versuchen, diese Aenderungen durch neue Buntfunktionen $\psi_i'(\lambda)$ zu beschreiben, die als Lineartransformationen aus den alten $\psi_i(\lambda)$ hervorgehen.

- a) Wir benutzen das im letzten Kapitel hergeleitete wichtige Ergebnis, dass die messbaren Spektralwertfunktionen $r(\lambda)$, $g(\lambda)$ und $b(\lambda)$ bei Lineartransformationen der Empfindlichkeiten invariant bleiben.
- b) Wir setzen voraus, dass die Helligkeitsänderung zwischen neuem und altem Umfeld gering ist. Dann wird die Empfindlichkeitsänderung der Helligkeitsfunktion $\psi_1(\lambda)$ vernachlässigbar sein.

Wegen a) und unter der Voraussetzung b) folgt, dass unter den linearen Empfindlichkeitsänderungen

$$\begin{pmatrix} \psi_1'(\lambda) \\ \psi_2'(\lambda) \\ \psi_3'(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(\lambda) \\ \psi_2(\lambda) \\ \psi_3(\lambda) \end{pmatrix} \quad (3.2;1)$$

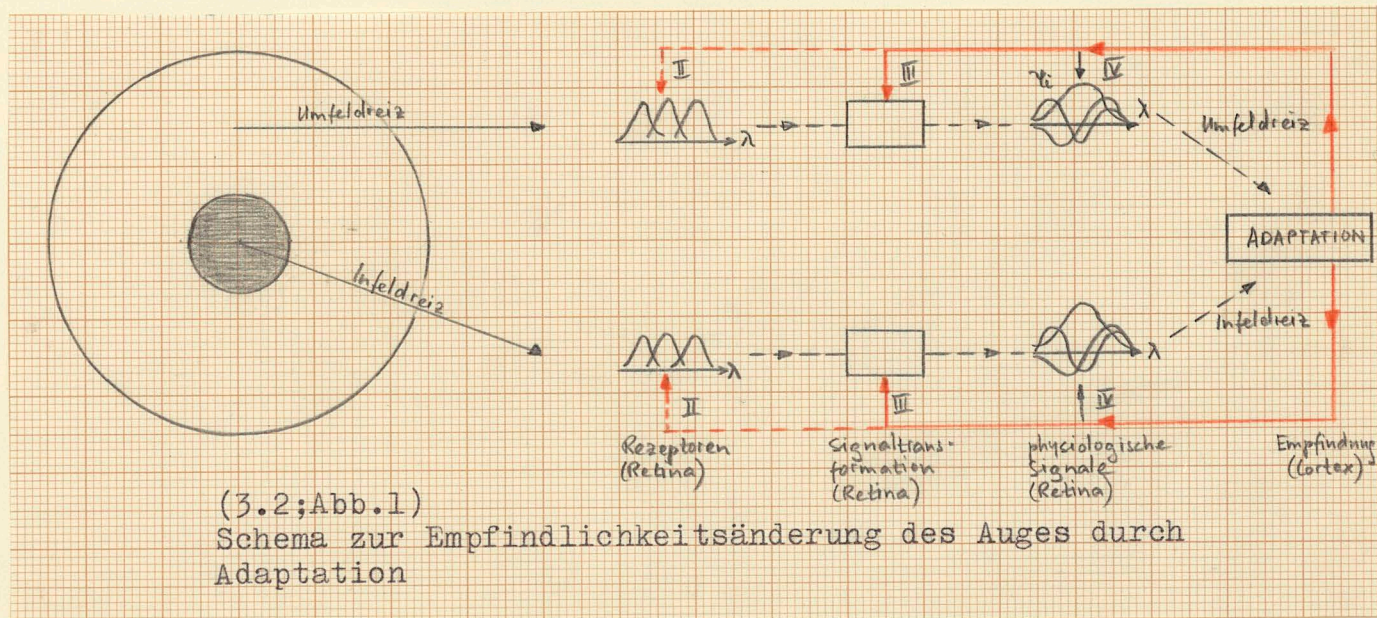
die gemessenen Spektralwertfunktionen und die gemessene Flimmerhelligkeit invariant bleiben. Solche Aenderungen stehen also mit allen berücksichtigten Daten der vorherigen Kapitel in Einklang. Nach dem Beweis des letzten Kapitels 3.1 lässt auch der experimentell ermittelte KRIES'sche Persistenzsatz obige Aenderungen zu.

Wir wollen ein Schema entwickeln, wie man sich diese Aenderung der Empfindlichkeiten vorstellen könnte.

Wir fassen das Auge als "Regelsystem" auf, dass sich an das jeweilige Umfeld anpasst. Dann bestehen folgende wichtige Möglichkeiten:

- I Durch "Ausbleichen" der Rezeptoren wird eine Empfindlichkeitsänderung bewirkt.
- II Der Adaptationsreiz ändert die Empfindlichkeiten der Rezeptoren. Die Signalumwandlung ändert sich nicht.
- III Der Adaptationsreiz ändert die Signalumwandlung. Die Empfindlichkeiten der Rezeptoren ändert sich nicht.
- IV Der Adaptationsreiz ändert die Signale der Infeldfarbe nachträglich. Rezeptorempfindlichkeit und Signalumwandlung bleiben invariant.

Die Möglichkeit I wurde durch Untersuchungen von DARTNALL (1962 ff)¹⁾ widerlegt. Wir wissen nicht, ob auch eventuell die Möglichkeiten II und III ausscheiden. Wir wollen annehmen, dass die durch Adaptation an das Umfeld geänderten Empfindlichkeiten $\psi_1'(\lambda)$ entsprechend (3.2;1) mit den alten $\psi_1(\lambda)$ verknüpft sind. Wir werden offen lassen, ob eine Aenderung nach der Möglichkeit II, III oder IV überwiegt. Wir stellen die verschiedenen Möglichkeiten in Abb. 1 schematisch dar.



1) Dartnall, H.J.A., The photobiology of the visual processes. The Eye 2, Part 2, (H. Davson editor) N.Y., 1962.

Nach dieser kurzen Zwischenbetrachtung wollen wir uns fragen, wie die Veränderung der Empfindlichkeiten experimentell messbar ist. Offenbar bleiben Spektralwertfunktionen und Flimmerhelligkeit unter der Transformation (3.2;1) invariant.

Wir vermuten, dass die experimentelle Messung der spektralen Urfarben und die Veränderung ihrer Lage bei verschiedener Adaptation zur Ermittlung der Empfindlichkeiten und ihrer Änderungen dienen können.

Nach Hypothese 5 und 6 von Kapitel 2.2 sollen die spektralen Urfarben $\lambda_Y, \lambda_R, \lambda_B, \lambda_G$ (bzw. $\lambda'_Y, \lambda'_R, \lambda'_B, \lambda'_G$) stets die Nullstellen der Buntfunktionen $\psi_i(\lambda)$ (bzw. $\psi'_i(\lambda)$) sein. Die spektralen Urfarben sind experimentell messbar.

Wir behaupten, dass aus den experimentellen Daten

- 1) Spektralwertfunktionen
- 2) Urfarblage im Spektrum

die Buntfunktionen $\psi_2(\lambda)$ und $\psi_3(\lambda)$ berechenbar sind. Der Beweis zerfällt in mehrere Teile. Wir wollen zeigen:

- A) Es lassen sich mit den Daten 1) und 2) zwei Buntfunktionen $\psi_2(\lambda)$ und $\psi_3(\lambda)$ als Lineartransformationen der Spektralwertfunktionen berechnen.
- B) Die Transformation ist eindeutig bestimmt.
- C) Die Buntfunktionen $\psi_2(\lambda)$ und $\psi_3(\lambda)$ sind unabhängig vom Primärsystem, das zur Messung der Spektralwertfunktionen gewählt wurde.

Beweis:

- A) Die gesuchte lineare Transformation zwischen den Spektralwertfunktionen $r(\lambda), g(\lambda), b(\lambda)$ und den Buntfunktionen $\psi_2(\lambda)$ und $\psi_3(\lambda)$ hat die Form

$$\psi_2(\lambda) = \alpha_{21} r(\lambda) + \alpha_{22} g(\lambda) + \alpha_{23} b(\lambda) \quad (3.2;2-3)$$

$$\psi_3(\lambda) = \alpha_{31} r(\lambda) + \alpha_{32} g(\lambda) + \alpha_{33} b(\lambda)$$

Die Transformationskoeffizienten sind durch Vorgabe der Funktions-

werte $\psi_2(\lambda)$, $\psi_3(\lambda)$, $r(\lambda)$, $g(\lambda)$ und $b(\lambda)$ an 3 Spektralstellen (etwa λ_Y , λ_B und λ_G) festgelegt.

Wir bestimmen die α_{2j} aus den Gleichungen an den Spektralstellen λ_Y , λ_R und λ_G

$$1 = \alpha_{21} r(\lambda_Y) + \alpha_{22} g(\lambda_Y) + \alpha_{23} b(\lambda_Y) \quad (3.2;4-6)$$

$$0 = \alpha_{21} r(\lambda_R) + \alpha_{22} g(\lambda_R) + \alpha_{23} b(\lambda_R)$$

$$0 = \alpha_{21} r(\lambda_G) + \alpha_{22} g(\lambda_G) + \alpha_{23} b(\lambda_G)$$

und die α_{3j} aus den Gleichungen an den Spektralstellen λ_Y , λ_B und λ_G

$$0 = \alpha_{31} r(\lambda_Y) + \alpha_{32} g(\lambda_Y) + \alpha_{33} b(\lambda_Y) \quad (3.2;7-9)$$

$$0 = \alpha_{31} r(\lambda_B) + \alpha_{32} g(\lambda_B) + \alpha_{33} b(\lambda_B)$$

$$-1 = \alpha_{31} r(\lambda_G) + \alpha_{32} g(\lambda_G) + \alpha_{33} b(\lambda_G)$$

B. Da die Vektoren \vec{x}_Y , \vec{x}_R , \vec{x}_B und \vec{x}_G nicht in einer Ebene liegen, so sind die Determinanten

$$\Delta_{YRG} = \begin{vmatrix} r(\lambda_Y) & g(\lambda_Y) & b(\lambda_Y) \\ r(\lambda_R) & g(\lambda_R) & b(\lambda_R) \\ r(\lambda_G) & g(\lambda_G) & b(\lambda_G) \end{vmatrix} \quad (3.2;10)$$

und entsprechend Δ_{YBG} verschieden von Null und die α_{2j} und α_{3j} bestimmbar. Die Transformation zwischen Spektralwertfunktionen $r(\lambda)$, $g(\lambda)$, $b(\lambda)$ und Buntfunktionen ist daher eindeutig festgelegt.

C. Zwei Funktionendoppel $\psi_i(\lambda)$ und $\psi_i^t(\lambda)$ ($i = 2, 3$) gewonnen durch lineare Transformation der Spektralwertfunktionen $r(\lambda)$, $g(\lambda)$, $b(\lambda)$ oder durch lineare Transformation von $r^t(\lambda)$, $g^t(\lambda)$, $b^t(\lambda)$ stimmen an 3 Stellen überein. Wegen der GRASSMANN'schen Gesetze gilt

$$\begin{pmatrix} r(\lambda) \\ g(\lambda) \\ b(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ b_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^t(\lambda) \\ g^t(\lambda) \\ b^t(\lambda) \end{pmatrix} \quad (3.2;11)$$

Daher stimmen die Funktionen $\psi_i(\lambda)$ und $\psi_i^t(\lambda)$ auch an allen anderen Stellen überein. Die Transformationskoeffizienten ergeben sich für jedes Spektralwertfunktionensystem so, dass die Buntfunktionen $\psi_i(\lambda)$ bzw. $\psi_i^t(\lambda)$ identisch ausfallen. Die Buntfunktionen sind daher unabhängig vom Primärsystem, das zur Messung der Spektralwertfunktionen gewählt wurde.

Wir bestimmen daher aus den experimentell messbaren Urfarbspektralstellen λ_Y , λ_R , λ_B , λ_G die Transformationskoeffizienten der Gleichungen

$$\psi_i(\lambda) = \beta_{i1} x(\lambda) + \beta_{i2} y(\lambda) + \beta_{i3} z(\lambda) \quad (3.2;12)$$

$(i=2,3)$

Unter Benutzung der Daten der Tabelle 1

Farbe	Wellenlänge	$x(\lambda)$	$y(\lambda)$	$z(\lambda)$	$\psi_2(\lambda)$	$\psi_3(\lambda)$
Urgelb	$\lambda_Y=574 \text{ nm}$.8267	.9339	.0017	1	0
Urrot	$\lambda_R=494^c \text{ nm}$.0107	.0038	.0005	0	—
Urblau	$\lambda_B=475 \text{ nm}$.1304	.1124	.9281	—	0
Urgrün	$\lambda_G=503 \text{ nm}$.0028	.3701	.2238	0	-1

(3.2;Tabelle 1)

Experimentelle spektrale Urfarben,
CIE-Farbkomponenten der spektralen Urfarben,
Buntkomponenten der spektralen Urfarben.

ergeben sich die Transformationskoeffizienten β_{ij} zwischen Spektralwertfunktionen und Buntfunktionen. Wenn wir weiter noch den im flimmerphotometrischen Experiment ermittelten Zusammenhang zwischen flimmerphotometrischer Helligkeitsfunktion $\psi_1(\lambda)$ und den Spektralwertfunktionen berücksichtigen, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \psi_1(\lambda) \\ \psi_2(\lambda) \\ \psi_3(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & \beta_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\lambda) \\ y(\lambda) \\ z(\lambda) \end{pmatrix} \quad (3.2;13)$$

mit

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0. & 1.0000 & 0. \\ -.4139 & 1.4571 & -2.4046 \\ 2.9797 & -2.6662 & -.0960 \end{pmatrix} \quad (3.2;14)$$

Durch Vergleich mit Gleichung (2.1;11) ergibt sich, dass die Matrix (β_{ij}) mit der Matrix (a_{ij}) übereinstimmt. Wenn wir nochmals auf den Gang unserer Theorie zurückblicken, so sehen wir:

I. Aus den an den Anfang unserer Theorie gestellten Unbunt- und Buntfunktionen $\psi_i(\lambda)$ konnten folgende Daten ausgerechnet werden

- 1) Spektralwertfunktionen
- 2) Flimmerphotometrische Helligkeit
- 3) spektrale Urfarblage

Die aus den Funktionen $\psi_i(\lambda)$ berechneten Ergebnisse stimmten mit den entsprechenden experimentellen Ergebnissen überein.

II. Es gibt ein Verfahren, das aus den experimentellen Daten 1), 2) und 3) die Buntfunktionen $\psi_i(\lambda)$ zu berechnen gestattet.

III a) Die Spektralwertfunktionen sind nach (2.4;42) und die flimmerphotometrische Helligkeitsfunktion nach (2.6;7) nach beliebiger Wahl des Primärsystems eindeutige lineare Transformationen der Unbunt- und Buntfunktionen. Die spektralen Urfarben sind durch die Buntfunktionen eindeutig festgelegt.

b) Die Unbunt- und Buntfunktionen sind bei gegebener spektraler Urfarblage eindeutige lineare Transformationen der Spektralwertfunktionen und flimmerphotometrischen Helligkeitsfunktion.

Wegen der Linearität und Eindeutigkeit der Transformationen von a) und b) müssen die an den Anfang unserer Theorie gestellten Unbunt- und Buntfunktionen mit den aus den experimentellen Daten berechneten übereinstimmen.

Damit bildet die Theorie einen in sich geschlossenen Ring. Wenn man die Bunt- und Unbuntfunktionen aus den experimentellen Daten nach unserem in diesem Kapitel angegebenen Verfahren berechnet, so können aus diesen Unbunt- und Buntfunktionen auch wieder alle experimentellen Ergebnisse nach den in Kapitel 2 angegebenen Verfahren vorausberechnet werden.

3.3 Wesentlichste Unterschiede der vorliegenden Theorie gegenüber der bisherigen.

Die Buntfunktionen der bisherigen Theorie wurden durch Forderungen berechnet; die von denen der Tabelle 1, Kapitel 3.2 abweichen. Wir stellen die bisherigen und unsere neuen Forderungen in einer Tabelle zusammen:

Theorie	Farbe	Wellenlänge	$\psi_2(\lambda)$	$\psi_3(\lambda)$	
vor- liegen- de Theorie	Urgelb	$\lambda_Y = 574$	1	0	
	Urrot	$\lambda_R = 494^c$	0	—	
	Urblau	$\lambda_B = 475$	—	0	
	Urgrün	$\lambda_G = 503$	0	-1	
bis- herige Theorie z.B. HASSEN- STEIN	Urgelb	$\lambda_Y = 575$	1 *)	0] kompen- sativ
	Urrot	$\lambda_R = \lambda_G^c = 502^c$	0	—	
	Urblau	$\lambda_B = \lambda_Y^c = 474$	—	0] kompen- sativ
	Urgrün	$\lambda_G = 502$	0	-1 *)	
weitere Bedingung: ($U(\lambda)$ spektrale Umfeld- energie)			$\int \psi_2(\lambda) u(\lambda) d\lambda = 0$	$\int \psi_3(\lambda) u(\lambda) d\lambda = 0$	

(3.3; Tabelle 1)

Forderungen an die Buntfunktionen $\psi_2(\lambda)$ in der bisherigen und neuen Theorie.

*) Eine mögliche Normierung verschieden von ± 1 ändert nur die Amplitude von $\psi_2(\lambda)$ oder $\psi_3(\lambda)$ für alle λ um einen beliebigen hier unwesentlichen Faktor.

In unserer neuen Theorie sind die 6 Transformationskoeffizienten a_{ij} von

$$\psi_i(\lambda) = a_{i1} r(\lambda) + a_{i2} g(\lambda) + a_{i3} b(\lambda) \quad (i=2,3) \quad (3.3;1)$$

durch Vorgabe von 6 Funktionswerten $\psi_i(\lambda)$ ($i = 2,3$) berechenbar.

Nach der Theorie von z.B. HASSENSTEIN wurden ebenfalls 6 Funktionswerte vorgegeben. Da nach den Grundlagen der Theorie unbedingt die zusätzlichen 2 Integralbedingungen erfüllt werden müssen, so ist das Problem für experimentell ermittelte Urfarbwellenlängen λ_Y , λ_R , λ_B und λ_G nicht zu lösen. Man mogelt daher ein wenig und behauptet, die experimentellen Urfarben seien in Bezug auf "Weiss" kompensativ. Durch Manipulation der Wellenlängen λ_Y , λ_R , λ_B und λ_G werden die 6 Funktionsbedingungen praktisch auf 4 reduziert und zusammen mit den 2 Integralbedingungen ergeben sich 6 Bedingungen, welche die 6 unbekannten Transformationskoeffizienten zu berechnen gestatten.

Nun ergibt sich, dass experimentell ermitteltes spektrales Gelb (Wellenlänge λ_Y) und spektrales Blau (Wellenlänge λ_B) innerhalb der Fehlergrenzen von ± 3 nm zufällig nahezu kompensativ sind. (Vergleiche Tabelle 1). Man kann daher die Integralbedingung für $\psi_3(\lambda)$ ohne grosse Fehler erfüllen. Das hat den Vorzug, dass sich auch nach der Theorie Urgelb und Urblau zu "Weiss" mischen.

Experimentell ermitteltes "spektrales" Urrot (Wellenlänge λ_R) und spektrales Urgrün (Wellenlänge λ_G) sind auch innerhalb der Fehlergrenzen nicht mehr kompensativ. Diese Tatsache müssen wir akzeptieren und die notwendigen Folgerungen ziehen. Das scheint bisher in keiner Gegenfarbentheorie des Farbensehens geschehen zu sein. Nach allen bisherigen Theorien mischen sich Urrot und Urgrün kompensativ, d.h. sie mischen sich zu "Weiss".

Wie hat man dies in den bisherigen Theorien erreicht?

Man wollte unbedingt die Integralbedingung für $\chi_2(\lambda)$ erfüllen. Da wenig Messungen von "spektralem" Urrot vorlagen, so legte man die Wellenlänge λ_R des Urrot auf die kompensative Wellenlänge des Urgrün fest. Diese theoretische Festlegung wurde durch die Tatsache begründet, dass auch Urgelb und Urblau kompensativ sind. Wenn die experimentellen Ergebnisse heute die Kompensativität von Urrot und Urgrün verneinen, so zwingt das Experiment uns zu einer Aenderung der Theorie. Eine erste mit dieser experimentellen Tatsache übereinstimmende Theorie zu finden ist Aufgabe dieser Arbeit. Es hat sich bisher gezeigt und wird sich im folgenden noch zeigen, dass tiefgreifende Aenderungen an der bisherigen Gegenfarbentheorie des Farbensehens vorgenommen werden müssen. Diese Aenderungen sind so weitreichend, dass nur die wichtigsten in dieser Arbeit behandelt und andere nur angedeutet werden können.

4. Verschiedenheit der antagonistischen Buntsignale für eine "weisse" Farbe gemischt aus allen Spektralfarben und der Summe der antagonistischen Buntsignale für alle Einzelspektralfarben.

4.1 Verschiedenheit von X_1 -Achse und unbunter Umfeldachse und ihre Konsequenzen

Die im letzten Kapitel erwähnten tiefgreifenden Änderungen an der bisherigen Theorie reichen so weit, dass auch die bisherige "Terminologie" nicht mehr ausreicht. Es müssen neue "Begriffe" aus unserer Sprache entliehen werden, welche die mathematischen Symbole und physikalischen Grössen eindeutig beschreiben.

Bisher haben wir die Unbunt- und Buntsignale einer Farbe der spektralen Energie $f(\lambda)$

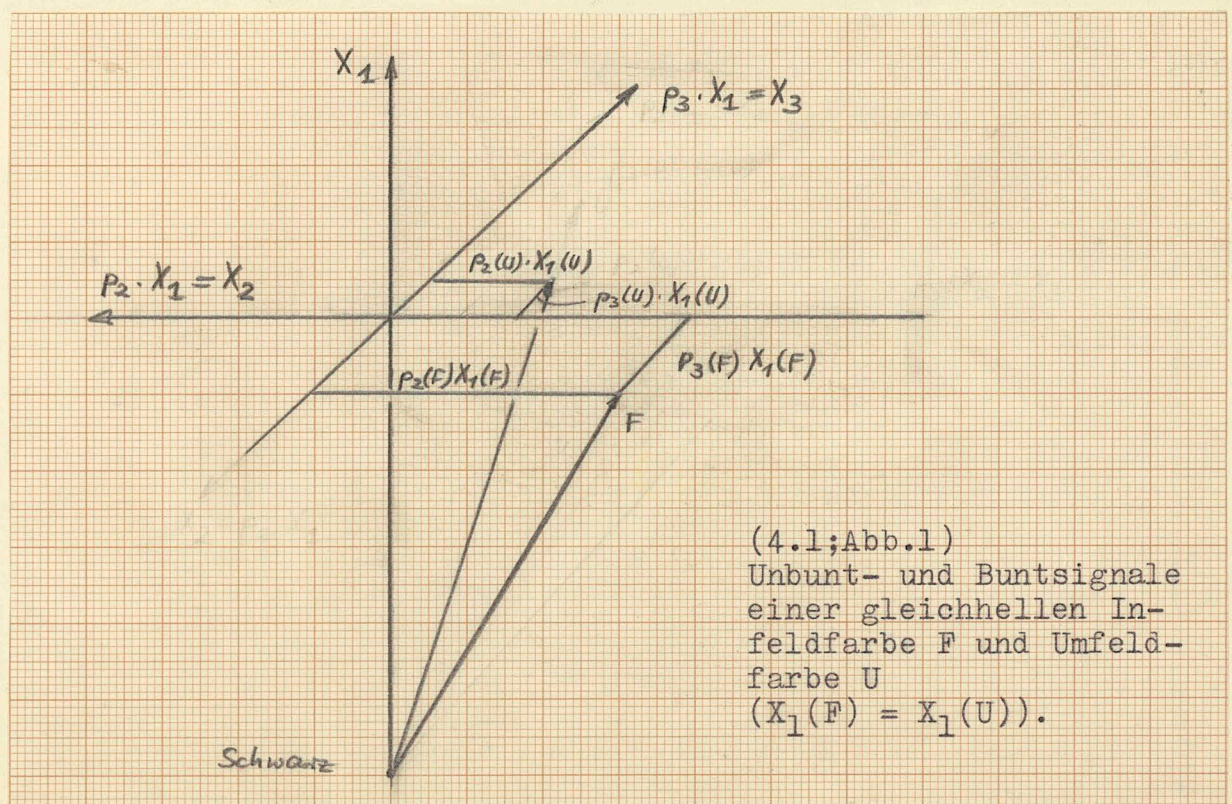
$$X_i = \int \psi_i(\lambda) f(\lambda) d\lambda \quad (4.1;1)$$

im kartesischen Koordinatensystem (X_1, X_2, X_3) dargestellt. Wir nannten die Signale X_1 Unbunt- oder Helligkeitssignale, die Signale X_2 Gelb-Blau-Buntsignale und die Signale X_3 Rot-Grün-Buntsignale.

Nach der in Kapitel 2 und 3 entwickelten Theorie erzeugt ein unbuntes Umfeld nicht nur Unbunt- sondern auch Buntsignale. Es ist für Lichtart C (mittleres Tageslicht)

$$X_2(u) = p_2(u) \cdot X_1(u) < 0 \quad \text{und} \quad X_3(u) = p_3(u) \cdot X_1(u) > 0$$

(siehe Abbildung 1). (4.1;2-3)



Definiert man als Unbuntachse die unbunte Umfeldrichtung, so werden die Unbuntsignale X_1 nicht auf der Unbuntachse abgetragen. Das ist zweifellos verwirrend. In der bisherigen Theorie gab es diese Schwierigkeiten nicht, weil das unbunte Umfeld immer im Punkte $X_2 = X_3 = 0$ lag und daher Unbuntachse mit unbunter Umfeldachse übereinstimmte.

Es ist ein schwieriges Problem und nicht Aufgabe dieser Arbeit, die Begriffe und ihre Unterschiede neu zu definieren. Da zum Beispiel der Begriff Unbuntsignal Verwirrung hervorrufen kann, so wollen wir im folgenden stets von X_1 , X_2 und X_3 -Signal sprechen und auf ihre namendliche Kennzeichnung möglichst verzichten.

Die Verschiedenheit von X_1 -Achse und unbunter Umfeldachse hat Konsequenzen, die bis in alle Details nicht zu übersehen sind. Wir wollen uns die wichtigsten Folgerungen in diesem Kapitel grob veranschaulichen und dann in den nächsten Kapiteln die einzelnen Probleme näher betrachten.

1) Stufung der Grauachse

Eine Infeldfarbe F der Helligkeit $Y(F)$ kann heller oder dunkler als das Umfeld U mit der Helligkeit $Y(U)$ sein. Es ist bekannt, dass unbunte Infeldfarben verschiedener Helligkeit eine gleichabständige Graureihe bilden, wenn die Infeldhelligkeiten eine ungefähr kubische Reihe bilden. Wir bezeichnen die Empfindungsgrößen mit einem $\hat{\cdot}$ (Dach-Koordinaten). Dann gilt

$$\hat{Y}(F, U) \approx \left[\frac{Y(F)}{Y(U)} \right]^{1/3} \quad (4.1;4)$$

Allerdings gibt es eine untere und obere Schwelle, wo weitere Erniedrigung bzw. Erhöhung der Infeldhelligkeit keinen weiteren Empfindungsunterschied mehr erzeugt. Dieses experimentelle Ergebnis wird durch ein Potenzgesetz nicht beschrieben.

Durch Analogie mit den experimentellen Ergebnissen bei der Lautheitsstufung des Ohres können wir eine Stufungsformel und die physikalische Bedeutung ihrer Konstanten ableiten.

Für kleine Helligkeiten kann die Stufung durch eine hyperbolische Funktion

$$\hat{Y}(I, U) = \frac{c_1}{1 + \frac{c_2}{Y}} \quad (4.1;5)$$

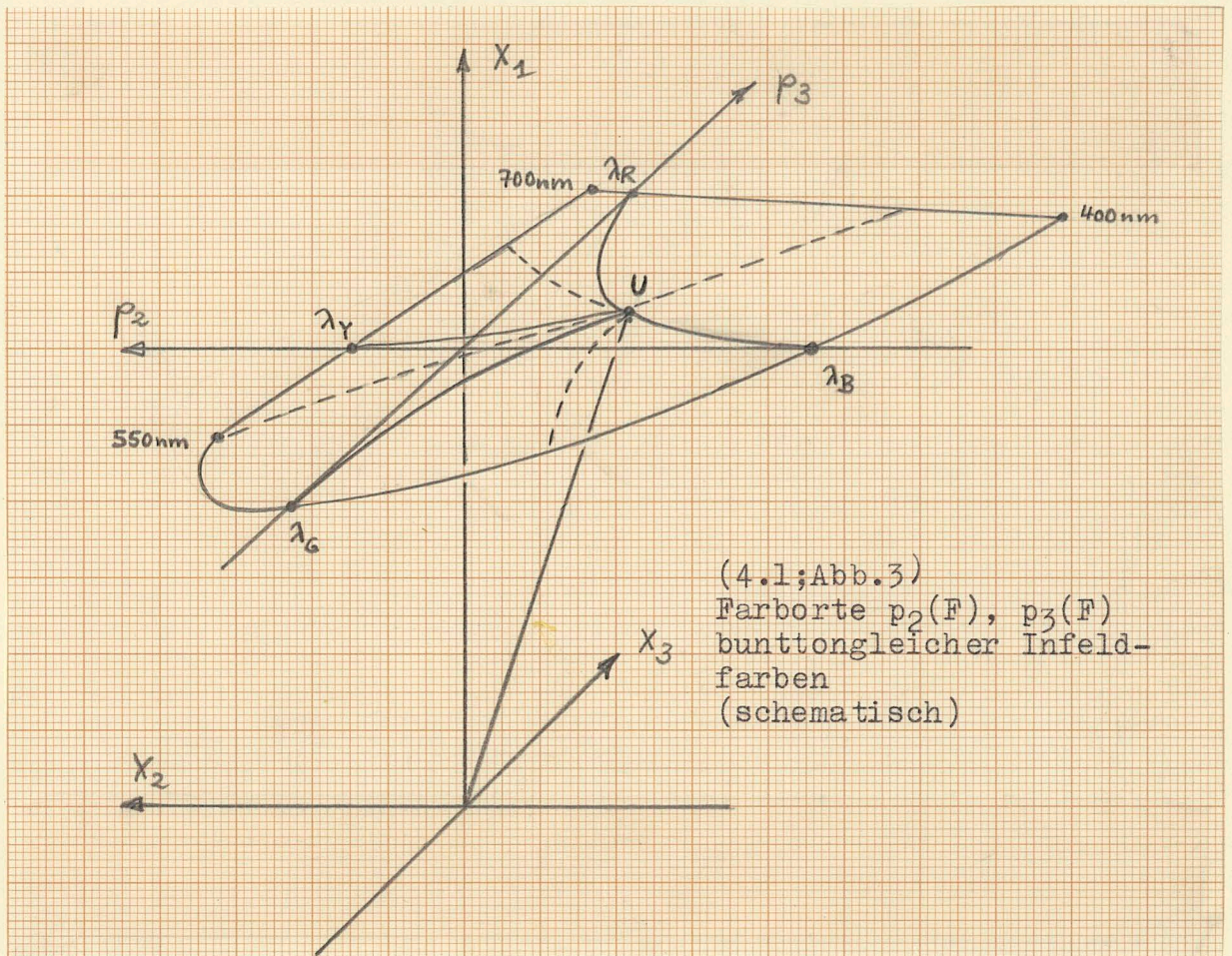
beschrieben werden.

Die Konstanten c_1 und c_2 sind einfache Funktionen der messbaren unteren Schwelle Y_s und der Umfeldhelligkeit Y_u .

2) Bunttongleiche Farben gleicher Helligkeit

Das unbunte Umfeld ist der Endpunkt von Farbreihen gleichen Bunttons. Farbreihen von zum Beispiel urrotem Buntton beginnen im Farbort $p_2(F)$, $p_3(F)$ der urroten Spektralfarbe und enden im Farbort $p_2(U)$, $p_3(U)$ von Unbunt. Der Einfluss der Umfeldfarbe auf den Buntton der Infeldfarbe ist umso grösser, je weniger sich Umfeld- und Infeldfarbe unterscheiden. Es wird sich zeigen, dass der Einfluss des Umfeldes auf die Infeldfarbe mit abnehmender Relativsättigung (eingeführt in Kap. 1.5) ungefähr kubisch zunimmt.

Farborte von Farbreihen gleichen Bunttons sind daher keine Geraden sondern gekrümmt. Den schematischen Verlauf zeigt Abb.3.



Der nichtlineare Einfluss des Umfeldes auf den Buntton des Infeldes wird durch die Gleichungen

$$p_i^*(F) = p_i(F) - f(\delta_F^*) p_i(U) \quad (i=2,3) \quad (4.1; 6-8)$$

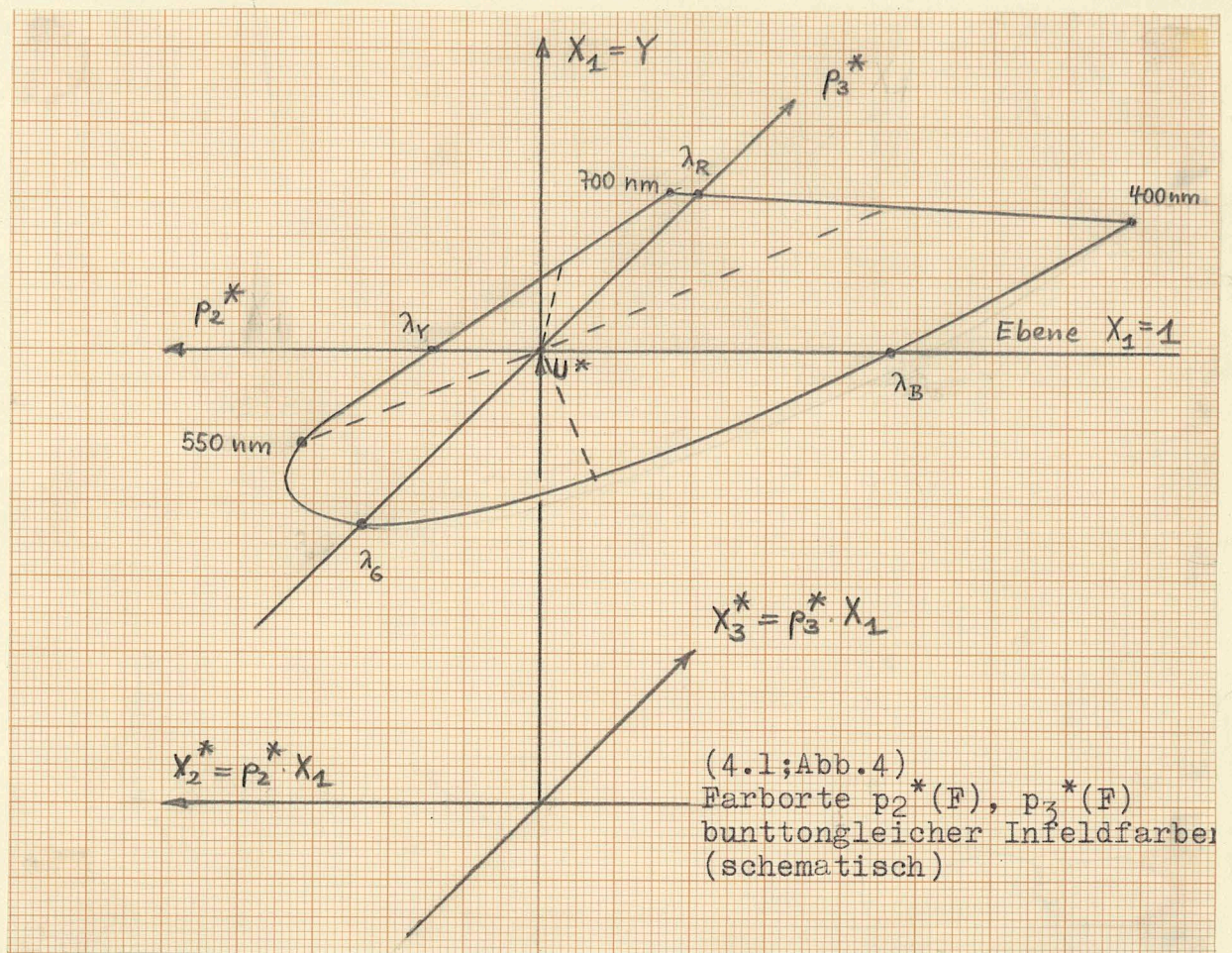
$$\text{mit } f(\delta_F^*) = 1 \quad \text{für } \delta_F^* = 0 \quad (\text{Unbunt})$$

$$f(\delta_F^*) = 0 \quad \text{für } \delta_F^* = 1 \quad (\text{Spektralfarbe})$$

beschrieben. Mit Erfolg lässt sich eine hyperbolische Funktion

$$f(\delta_F^*) = 1 - \frac{\delta_F^*(1+2)}{\delta_F^*+2} \approx 1 - [\delta_F^*]^{1/3} \quad (4.1; 9)$$

zur Beschreibung der Nichtlinearität verwenden. Die im System $p_i(F)$ gekrümmten Bunttonlinien (Abb. 3) werden im System $p_i^*(F)$ in Geraden abgebildet (Abb. 4).

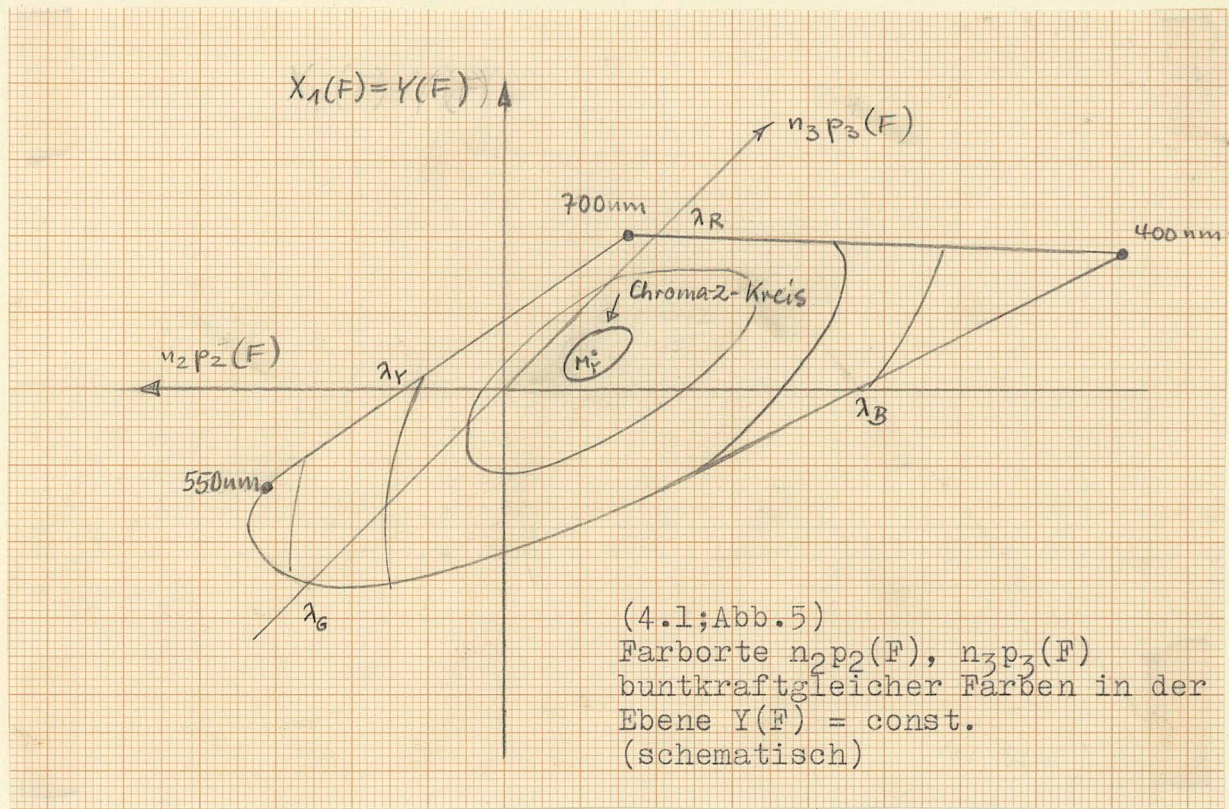


Die Farborte der Spektralfarben werden wegen $\delta_F^* = 1$ in sich selbst und der Farbort des Umfeldes wird in den Ursprung abgebildet. Es wird angenommen, dass die Relativsättigung im System*, d.h. entlang empfindungsgemäss bunttongleicher Farbreihen messbar ist.

3) Zusammenhang zwischen Chroma und Sättigung für helligkeitsgleiche Farben von kleinem Chroma

Wir finden aus den experimentellen Daten, dass nach Multiplikation der Achsen p_2 und p_3 mit den Masstabsfaktoren $n_2:n_3 = 1:2.8$ alle Farborte der Chroma-2-Farben in allen Ebenen $Y(F) = \text{const.}$ auf Kreisen liegen.

In Abb.5 sei dieses Ergebnis für helligkeitsgleiche Infeldfarben dargestellt.



Wir definieren als Sättigungsdifferenz zum Mittelpunkt M_Y

$$p_r(F, M_Y) = \sqrt{n_2^2 [p_2(F) - p_2(M_Y)]^2 + n_3^2 [p_3(F) - p_3(M_Y)]^2} \quad (4.1; 10)$$

mit $p_i(M_Y)$ Sättigung des Mittelpunktes des Chroma-2-Kreises (ist Funktion der Infeldhelligkeit $Y(F)$).

$p_i(F)$ Sättigung der Chroma 2-Farben

n_2, n_3 Masstabsfaktoren

Dann gilt

$$\hat{p}_r(F, M_Y) \approx p_r(F, M_Y) \quad (4.1; 11)$$

Der Farbort des Mittelpunktes M_Y ist ausser für $Y(F) = Y(U)$ verschieden vom Farbort U des Umfeldes.

4) Zusammenhang zwischen Chroma, Sättigung und Helligkeit

Für chromagleiche Farben auf allen Helligkeitsebenen gilt

$$\hat{C}(p_r, Y) = \hat{p}_r(F, M_Y) \cdot \hat{Y}(F, U) \quad (4.1; 12-14)$$

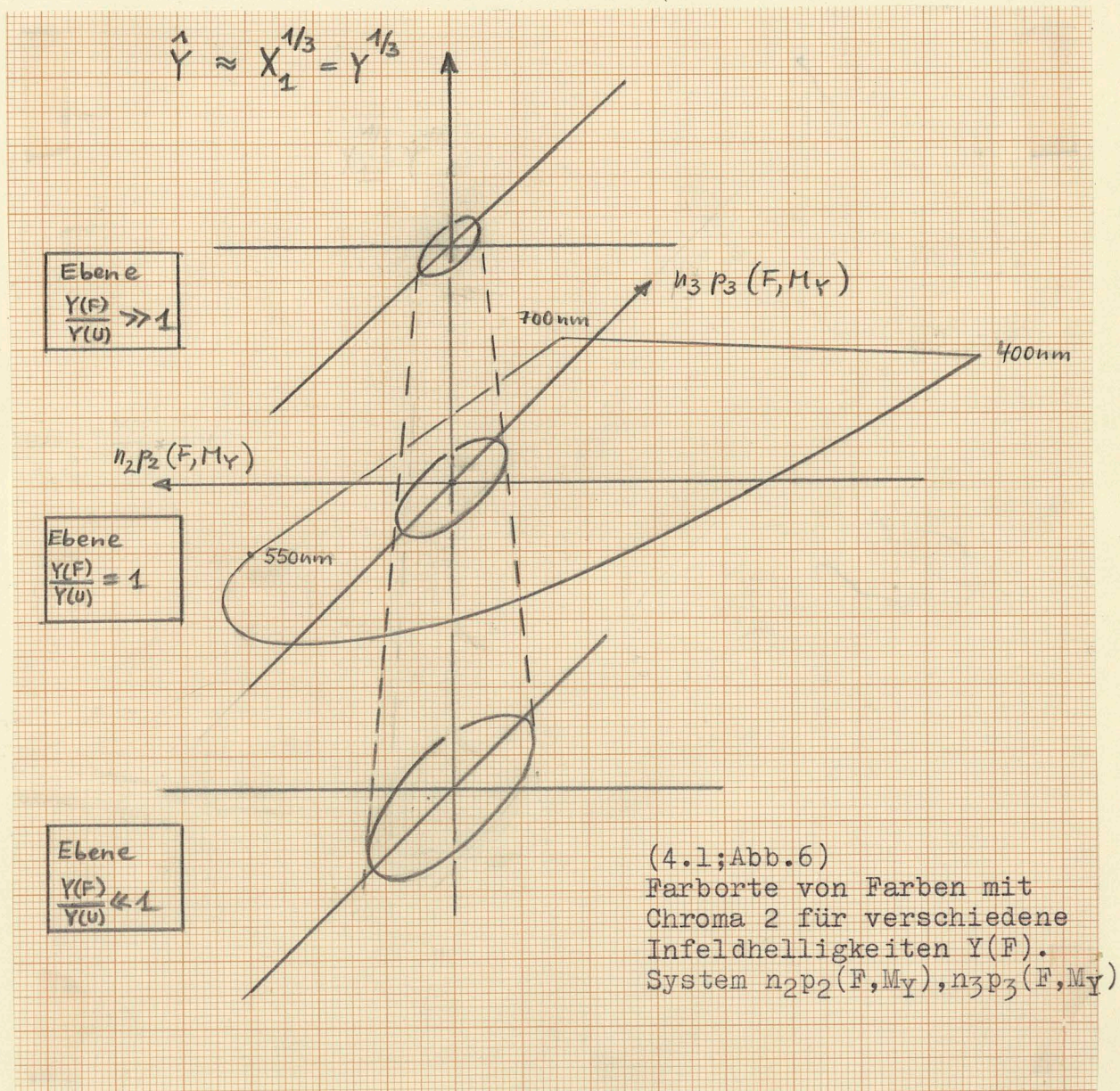
mit $\hat{Y}(F, U) \approx .91 \cdot Y(F)^{1/3}$

(Näherung für Helligkeitsstufung)

und $\hat{p}_r(F, M_Y) \approx \frac{p_r(F, M_Y)}{1 + C(\lambda) p_r(F, M_Y)}$

(Näherung für Sättigungsstufung)

Durch den Faktor $\hat{Y}(F, U)$ werden die Chroma-2-Kreise im System $n_i p_i(F, M_Y)$ (Abb. 6) in gleichgrosse Kreise transformiert.



Im gegenwärtigen Stadium der Untersuchungen wird eine Sättigungsstufenformel

$$\hat{p}_i(F, m_Y) = \frac{p_i(F)}{1 + c(\lambda) p_r^*(F)} - \frac{p_i(m_Y)}{1 + c(\lambda) p_r^*(m_Y)} \quad (4.1;15)$$

für wahrscheinlich gehalten. Wegen $|c(\lambda)| \ll 1$ ist eine Entscheidung über die Funktion im Nenner mit den vorliegenden experimentellen Daten ausserordentlich erschwert.

Die angegebene einfachere Sättigungsstufenformel ist eine Näherung dieser Gleichung.

Wegen $p_r^*(m_Y) \approx p_r^*(U) = 0$ folgt zunächst

$$\hat{p}_i(F, m_Y) = \frac{p_i(F) - p_i(m_Y) [1 + c(\lambda) p_r^*(F)]}{1 + c(\lambda) p_r^*(F)} \quad (4.1;16)$$

Da meist (ausser im Gelb) $|p_i(m_Y)| < |p_i(F)|$ und $|c(\lambda) p_r^*(F)| < 1$ so folgt

$$\hat{p}_i(F, m_Y) = \frac{p_i(F, m_Y)}{1 + c(\lambda) p_r^*(F)} \quad (4.1;17)$$

Da weiter

$$\begin{aligned} p_i(F, m_Y) &= p_i(F) - p_i(m_Y) \\ &\approx p_i^*(F) - p_i^*(m_Y) \\ &\approx p_i^*(F) \end{aligned} \quad (4.1;18)$$

so gilt

$$p_r(F, m_Y) \approx p_r^*(F) \quad (4.1;19)$$

Einsetzen ergibt die angegebene von uns verwendete einfachere Näherung für die Sättigungsstufung

$$\hat{p}_i(F, M_Y) = \frac{p_i(F, M_Y)}{1 + c(\lambda) p_r(F, M_Y)} \quad (4.1;20)$$

oder

$$\hat{p}_r(F, M_Y) = \frac{p_r(F, M_Y)}{1 + c(\lambda) p_r(F, M_Y)} \quad (4.1;21)$$

5) Nullpunktverschiebung des Mittelpunktes M_Y der Farborte der Chroma-2-Farben

Die Farborte $p_2(F)$, $p_3(F)$ von Farben einer vorgegebenen kleinen Farbdifferenz liegen stets auf einer Ellipse um den Farbort $p_2(M)$, $p_3(M)$ des Mittelpunktes M . Entsprechend liegen auch die Farborte von Farben kleiner Buntkraft (Chroma 2 des MUNSELL-Systems) auf Ellipsen um den Farbort M der unbunten Vergleichsfarbe.

Die bisherige Ansicht, dass der Farbort M der als unbunt empfundenen Vergleichsfarbe für alle Infeldhelligkeiten mit dem Farbort des Umfeldes U übereinstimmt, ist wahrscheinlich falsch.

Unsere Theorie postuliert einen Restbuntimpuls für Farben vom Farbort des Umfeldes, wenn sie heller oder dunkler sind als das Umfeld. Der Effekt scheint durch HELSON und MICKELS¹⁾ bestätigt. Er wurde colour conversion genannt, weil eine Graureihe, die mit buntem Licht in mittelgrauem Umfeld beleuchtet wird, nur in der Nähe Umfeldhelligkeit unbunt und für dunkle und helle Infeldfarben in komplementären bunten Nachbildfarben empfunden wird.

Nach Punkt 4) wird eine beliebige Farbe F folgende Chromaimpulse besitzen

$$\hat{c}_i(p_r, Y) = \hat{p}_i(F, M_Y) \cdot \hat{Y}(F, U) \quad (4.1;22-23)$$

$$= \left[\frac{p_i(F)}{1 + c(\lambda) p_r^*(F)} - \frac{p_i(M_Y)}{1 + c(\lambda) p_r^*(M_Y)} \right] \hat{Y}(F, U)$$

1) Helson, H.: Adaptation Level Theory, London 1964, S.169

Haben insbesondere die Infeldfarben den Farbort des Umfeldes und sind sie gleich hell wie das Umfeld, so ist

$$p_i(F) = p_i(U) = p_i(M_Y) \quad (4.1;24)$$

Daher sind die Chroma-Impulse Null und die Farbe sieht unbunt aus.

Haben die Infeldfarben den Farbort des Umfeldes und sind sie verschieden hell wie das Umfeld, so ist

$$p_i(F) = p_i(U) \neq p_i(M_Y) \quad (4.1;25)$$

Daher sind die Chroma-Impulse verschieden Null und die Farbe sieht bunt aus.

Wir finden experimentell, dass sich die Farborte $p_i(M_Y)$ auf einer Geraden verschieben. Daher werden die dunklen und hellen Graustufen in komplementären Bunttönen empfunden. Genau dieser Effekt scheint von HELSON¹⁾ nachgewiesen.

Um den Effekt zu verstehen, kann man sich vereinfacht vorstellen, dass der 2. Term in der Chroma-Formel nur vom Farbort des Umfeldes und der Umfeldhelligkeit abhängt. Dann gilt

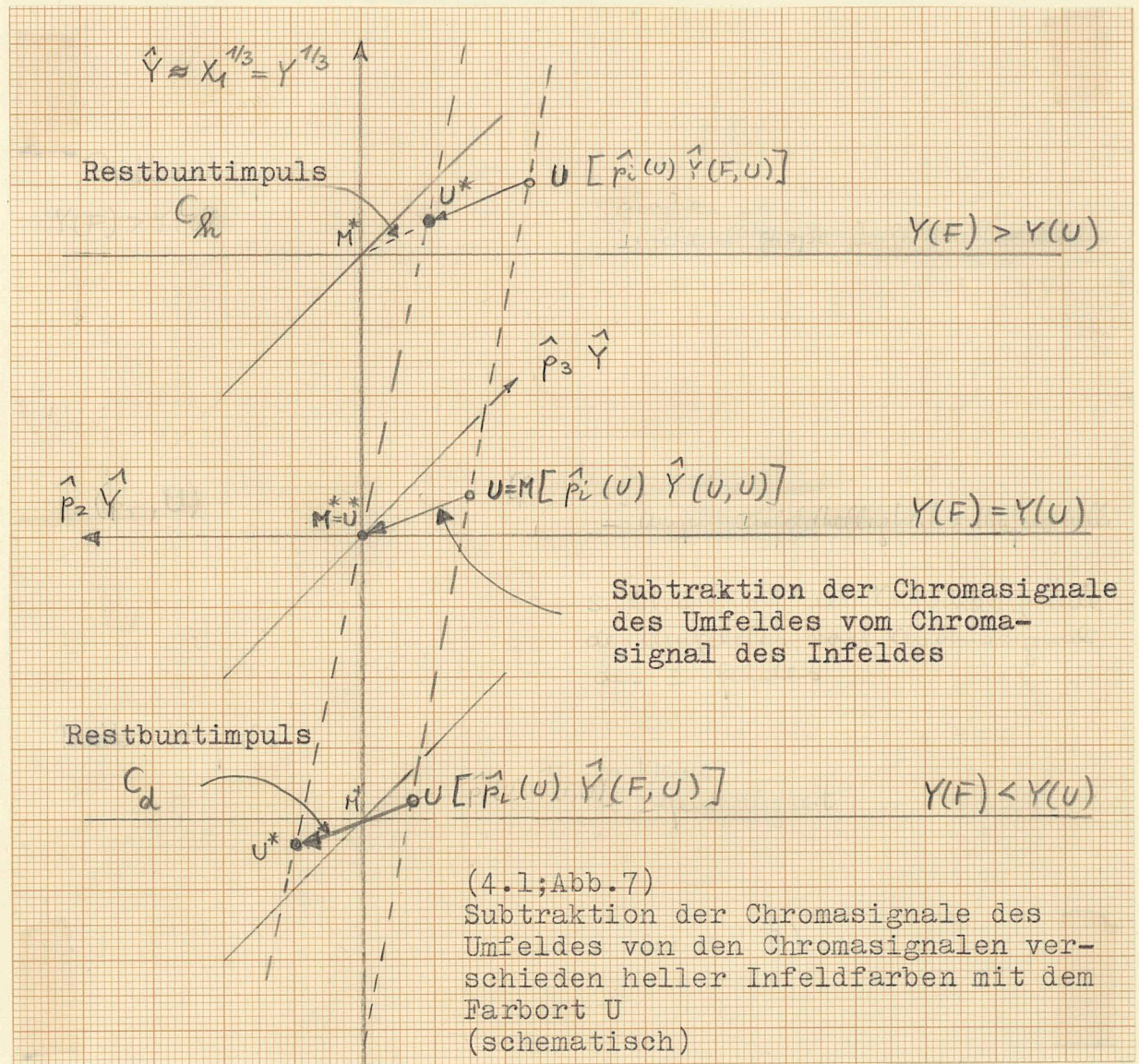
$$\hat{C}_i'(p_i, Y) = \frac{p_i(F)}{1 + c_\lambda p_i^*(F)} \hat{Y}(F, U) - \frac{p_i(U)}{1 + c_\lambda p_i^*(U)} \hat{Y}(U, U) \quad (4.1;26)$$

Farben beliebiger Helligkeit vom Farbort des Umfeldes ($p_i(F) = p_i(U)$) erhalten Buntimpulse, wenn $\hat{Y}(F, U) \neq \hat{Y}(U, U)$.

Es gilt

$$\hat{C}_i'(p_i, Y) = \frac{p_i(U)}{1 + c_\lambda p_i^*(U)} [\hat{Y}(F, U) - \hat{Y}(U, U)] \quad (4.1;27)$$

Dieser Effekt ist in Abb.7 dargestellt.



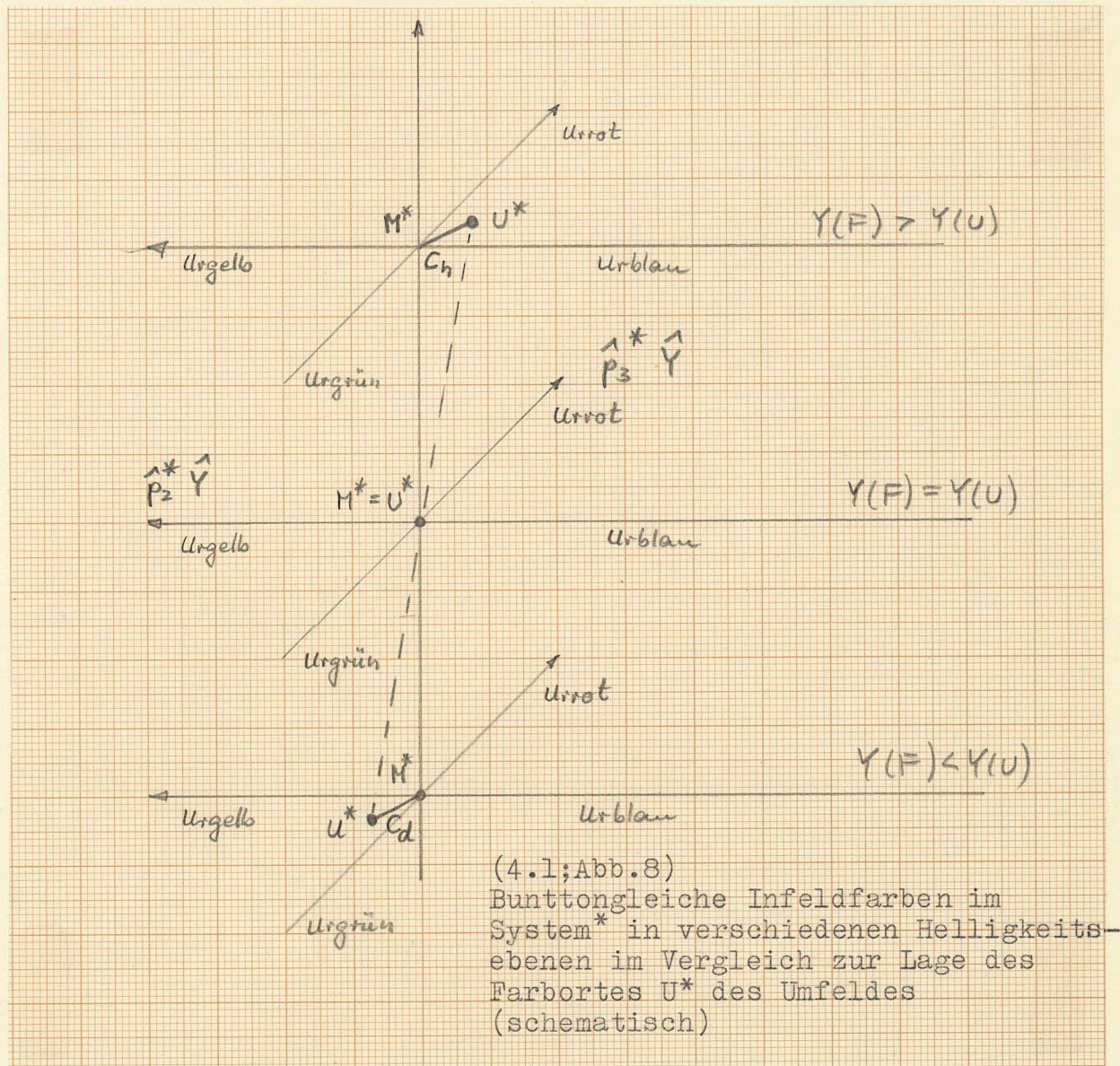
Er tritt experimentell genau in der angegebenen Richtung auf, doch ist seine Grösse um einen Faktor 10 kleiner als erwartet. Eine Erklärung dieser Verkleinerung steht noch aus.

6) Beschreibung des Bezold-Brücke-Effektes

Die exzentrische Verschiebung des Punktes M^* der Chroma-2-Farben gegenüber dem Farbort des Umfeldes U^* muss sich auf den Buntton der Farben verschiedener Helligkeit auswirken.

Nach der in Punkt 2) eingeführten Transformation ins System* liegen bunttongleiche Farben auf Geraden. Dieses System sei in Abb. 8 dargestellt. Nach Punkt 5) verbleiben für das Umfeld Restimpulse C_d für dunklere und Restimpulse C_h für hellere

Farben als die Umfeldfarbe.



Da wir den Buntton stets in Bezug auf das Umfeld U^* beurteilen, so muss (siehe Abb.8)

a) für dunklere Farben als das Umfeld

Urgrün und Urrot sich gegen Urblau verschieben.

Urgelb und Urblau sich gegen Urrot verschieben.

b) für hellere Farben als das Umfeld

Urrot und Urgrün sich gegen Urgelb verschieben.

Urgelb und Urblau sich gegen Urgrün verschieben.

Die Verschiebungen treten experimentell wirklich in diesen Richtungen auf. Man bezeichnet die Verschiebung der spektralen Urfarborte mit der Helligkeit als Bezold-Brücke-Effekt mit Umfeld. Die Verschiebung tritt jedoch nicht nur für Spektralfarben, sondern für alle Farben auf.

7) EVANS-G₀-Grenze

EVANS²⁾ hat 1967 eine Empfindungsgrösse gemessen, die mit den spektralen Sättigungen $p_2^*(\lambda)$ und $p_3^*(\lambda)$ in einfachem Zusammenhang zu stehen scheint. Er hat die Intensität von Infeldfarben variiert und diejenigen Intensitäten bzw. Helligkeiten bestimmt, bei welcher die Infeldfarbe gegenüber dem "weissen" Umfeld weder vergraut noch leuchtend erscheint. Die Helligkeit an der "weder vergraut noch leuchtend Grenze" nennt er Y_{G_0} , diejenige des Umfeldes Y_u .

Wir definieren

$$p_r^*(F) = \sqrt{n_2^2 p_2^{*2}(F) + n_3^2 p_3^{*2}(F)}$$

n_2, n_3 Masstabsfaktoren (siehe Punkt 5)

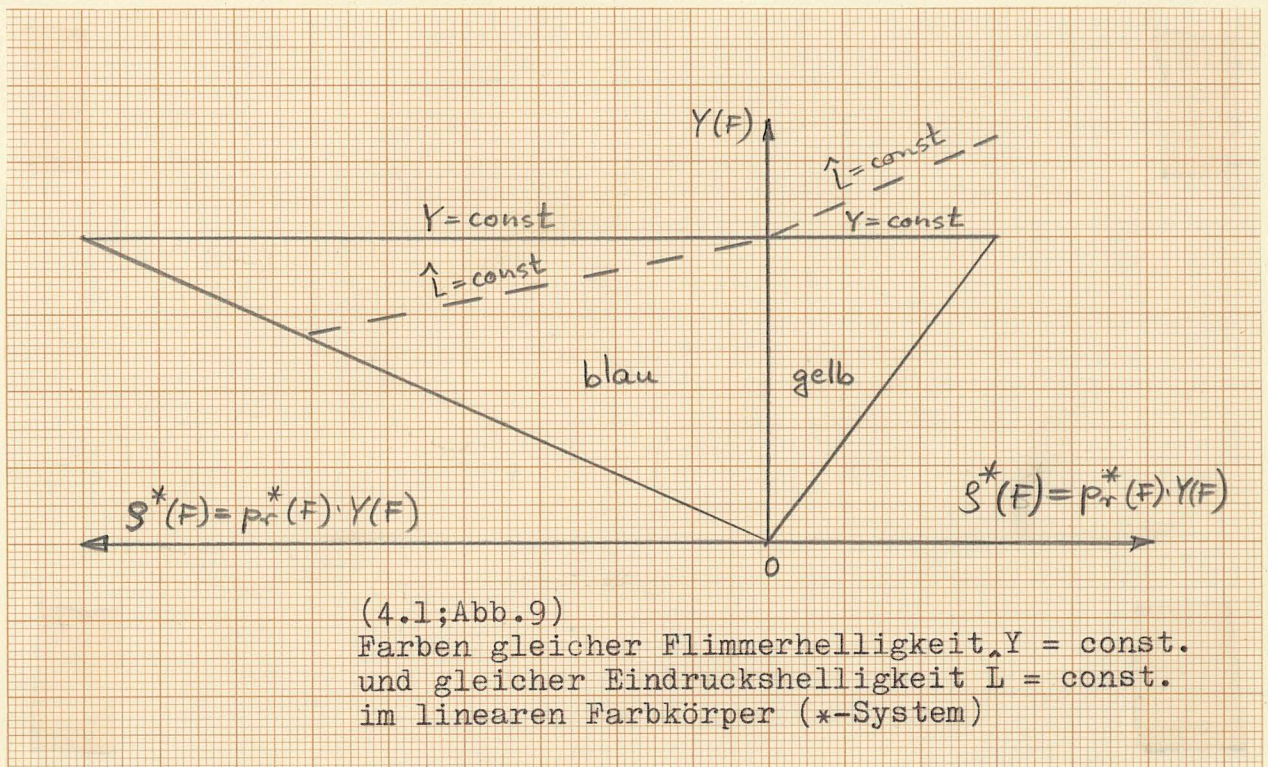
Dann beschreibt die Gleichung

$$\frac{Y_{G_0}}{Y_u} = \frac{1}{1 + p_r^*(F)}$$

die von EVANS für Spektralfarben ($F = \lambda$) ermittelten Ergebnisse. Wahrscheinlich gilt sie für beliebige Farben F , da die Gleichung auch für den Grenzfall $p_r^*(F) = 0$ das experimentelle Ergebnis $\frac{Y_{G_0}}{Y_u} = 1$ richtig beschreibt.

Es ist ausserordentlich überraschend, dass die beste Uebereinstimmung für Masstabsfaktoren $n_2 = 1$ und $n_3 = 2.8$ zwischen Theorie und Experiment erreicht wird. Das Masstabsverhältnis $n_3/n_2 = 2.8$ wurde auch in Punkt 5) gefordert, um die Farborte buntkraftgleicher Farben von Chroma 2 in Kreise zu transformieren. Zwischen der Helligkeit der G_0 -Grenze und der Chroma-Stufung besteht daher ein enger Zusammenhang.

2) R.M. Evans and K. Swenolt, Chromatic Strength of Colors: Dominant Wavelength and Purity, JOSA 57, 1319-1324 (1967).

8) Chroma-Stufung und Eindruckshelligkeit

Mit zunehmender Sättigung werden Infeldfarben konstanter Flimmerhelligkeit $Y(F) = Y(U)$ je nach Buntton heller oder dunkler empfunden. Die Empfindungsgrösse Eindruckshelligkeit weicht daher von der Flimmerhelligkeit für bunte Farben ab. Nach KOWALISKI³⁾ vermindert sich die Eindruckshelligkeit bei konstanter Flimmerhelligkeit für gelbgrüne und gelbe Farben und erhöht sich für blaurote und blaue Farben mit zunehmender Sättigung der Infeldfarben. Man spricht von Beitrag der Sättigung zur Eindruckshelligkeit \hat{L} . Wir vermuten, dass gilt

$$\hat{L}(F) = Y(F) [1 + c_\lambda p_r^*(F)] \quad |c_\lambda| \ll 1 \quad (4.1; 30)$$

Dann gilt aber für die wirksame Sättigung

$$\text{wirksame Sättigung} = \frac{\text{wirksame Buntheit}}{\text{wirksame Helligkeit}} \quad (4.1; 31)$$

oder

$$\hat{p}_r^*(F) = \frac{p_r^*(F) \cdot Y(F)}{Y(F) [1 + c_\lambda p_r^*(F)]} \quad (4.1; 32)$$

3) Kowaliski, P.: Equivalent Luminances of Colors, JOSA 59, 125-130 (1969).

Für die Sättigungsstufung folgt

$$\hat{p}_r^*(F) = \frac{p_r^*(F)}{1 + c_\lambda p_r^*(F)} \quad (4.1;33)$$

in formaler Uebereinstimmung mit Gleichung (4.1;14).

In Kapitel 4.6 werden die Konstanten $c(\lambda)$ der zitierten Gleichung aus den Experimenten ermittelt, in Abb.3 dargestellt und in Tabelle 2 gelistet. Es zeigt sich, dass gelbgrüne und gelbe Farben negative $c(\lambda)$ sowie blaurote und blaue Farben positive $c(\lambda)$ ergeben. Dieses Ergebnis steht qualitativ in völliger Uebereinstimmung mit dieser Theorie und den Experimenten von KOWALISKI³⁾. Seine Ergebnisse zeigen vor allem, dass die Buntheit nicht für alle Bunttöne eine Zunahme der Hellempfindung bringt, wie es bisher meist angenommen wurde. Die Abnahme der Eindruckshelligkeit für gelbgrüne und gelbe Farben ist wahrscheinlich nicht so auffallend wie die Zunahme der Eindruckshelligkeit für blaurote und blaue Farben, weil die Sättigung für die gelben Farben wesentlich kleiner ist als für blaue Farben.

9) Rückblick

Die qualitative Erklärung der vielen experimentellen Effekte beim Farbensehen scheint ein Vorzug der hier vorliegenden Theorie. Die fast lückenlose Erklärung der so verschiedenen Phänomene des Farbensehens folgte allein aus der Verschiedenheit von X_1 -Achse und unbunter Umfeldachse. Es scheint, dass "etwas Wahres" in dieser Annahme liegt. Es gibt wahrscheinlich bis heute keine Theorie des Farbensehens, die auf eine andere Art die vielen experimentellen Effekte in einen gleich geordneten Zusammenhang bringen kann.

4.2 Spektrale Urfarben und Beschreibung von Farben gleichen Bunttons (Hue, MUNSELL-System)

Die urfarbigen Bunttöne (unique hues), zum Beispiel Gelb als weder rötlich noch grünlich, sind Pfeiler der Farbordnungen von MIESCHER¹⁾ und HESSELGREN²⁾.

Die bei mittelgrauem Umfeld ($Y \approx 20.0$) von 28 Versuchspersonen aus einem 96-teiligen Farbkreis bei Xenonlicht (ungefähr Lichtart C) bestimmten Urfarben von MIESCHER¹⁾ stimmen gut mit den Ergebnissen von HESSELGREN überein. Die urfarbigen Bunttöne unterscheiden sich nur um eine $\frac{1}{2}$ Stufe im Rot und Blau, um 1 Stufe im Gelb und um 2 Stufen im Grün, gemessen im 96-teiligen Farbkreis von MIESCHER.

Die Farbkoordinaten der UR- und MITTEL-Farben von MIESCHER gibt Tabelle 1.

Buntton mit Nr.	X_c	Y_c	Z_c	x	y
Urgelb 2	70.52	77.82	10.18	.4449	.4909
gelbrot 5	60.31	45.44	5.55	.5419	.4083
Urrot 8	32.53	18.11	5.32	.5813	.3236
blaurot 11	16.15	8.47	30.90	.2909	.1526
Urblau 14	11.92	9.35	48.79	.1701	.1335
blaugrün 17	8.83	14.56	31.55	.1607	.2650
Urgrün 20	8.51	20.24	16.28	.1890	.4495
gelbgrün 23	25.23	45.15	14.00	.2990	.5351

(4.2;Tabelle 1)

Farbkoordinaten der Ur- und Mittelfarben für Lichtart C im Farbkreis von MIESCHER¹⁾.

- 1) Miescher, K. und Mitarbeiter, Ueber das natürliche Farbsystem, Die Farbe 10 (1961), S.115-144.
- 2) Hesselgren, S., Kurze Farbenlehre und Farbenatlas, T. Palmer AB, Stockholm 1953.

Uns interessieren die Ur- und Mittelbunttöne in der Klassifikation des MUNSELL-Systems³⁾. Die Ur- und Mittelbunttöne im MUNSELL-System wurden von 4 Versuchspersonen durch Bunttonvergleich mit den von MIESCHER ermittelten Ur- und Mittelfarben bestimmt. Die Versuche wurden auf mittelgrauem Umfeld bei Tageslicht durch Vergleich mit Farbproben von grossem Chroma des MUNSELL-Systems durchgeführt. Als Vergleichsfarben dienen stets MUNSELL-Farben der Helligkeit $Y = 19.8$ (Value 5). Tabelle 2 gibt die Ergebnisse.

Farbe	Klassifikation MUNSELL-System mit empfindungsgemäss bunttongleicher Wellenlänge						Korrektur wegen Bezold-Brücke Effekt
	K.R.	G.W.	A.V.	K.M.	Mittelwert		
Urgelb	7.5Y 575	8.5Y 574	10Y 572	10Y 572	8.5Y 574±2		572±2
Gelbrot	3.75YR 592	4.2YR 591	3.5YR 593	3.7YR 592	3.7YR 592±1		590±2
Urrot	6.5R 700	5.8R 494c	6R 494c	5.8R 494c	6R 494c		494c 700c 495c
Rotblau	7.5P 558c	7.5P 558c	7P 560c	7.5P 558c	7.4P 559c±1		559±1
Urblau	5.6PB 472	5PB 474.5	5.1PB 474	5PB 474.5	5.3PB 474±2		472±2
Blaugrün	7.5BG 488.5	8.75BG 487.5	8BG 488	10BG 486.5	8.5BG 488±2		489±2
Urgrün	6G 502.5	5G 504	6G 502.5	6.7G 501.5	5.9G 503±2		503±2
Gelbgrün	10GY 542	8.75GY 550	9GY 548	0.5G 536	9.5GY 544±8		542±10

(4.2; Tabelle 2)

Ur- und Mittelfarben des Miescher Farbkreises in der Klassifikation des Munsell-Systems mit Angabe der spektralen empfindungsgemäss bunttongleichen Wellenlänge.

Für Urgelb und Urblau sind die Farben des MIESCHER-Farbkreises heller bzw. dunkler als das mittelgraue Umfeld von $Y = 20$. (siehe Koordinaten Y des MIESCHER-Farbkreises in Tabelle 1). Urrot und Urgrün sind etwa gleich hell wie das Umfeld. Da sich wegen des BEZOLD-BRUECKE-Effektes die Urfarbwellenlängen λ bei unterschiedlicher Infeld- und Umfeldhelligkeit verschieben, so werden für Urrot und Urgrün die richtigen Werte gemessen. Die Wellenlängen λ_Y

3) Munsell, Book of Color, Auflage 1963.

und λ_B müssen jedoch korrigiert werden. Die Bunttonempfindung Urgelb verschiebt sich mit zunehmender Infeldhelligkeit gegen Urgrün. Da die Urfarbe "Gelb" heller ist als Umfeld und Vergleichsfarbe, so misst man eine zu grosse Wellenlänge. Der Fehler von ungefähr 2 nm wird korrigiert und wir erhalten $\lambda_Y = 572 \pm 2$ nm.

Die Bunttonempfindung Urblau verschiebt sich mit abnehmender Infeldhelligkeit gegen Urrot. Da die Urfarbe "Blau" dunkler ist als Umfeld und Vergleichsfarbe, so misst man eine zu grosse Wellenlänge. Der Fehler von ungefähr 2 nm muss korrigiert werden und wir erhalten $\lambda_B = 472 \pm 2$ nm.

Die Wellenlängen $\lambda_Y = 572 \pm 2$ nm und $\lambda_B = 472 \pm 2$ nm sind die spektralen Urfarbwellenlängen der hellen gelben Urfarbe und der dunklen blauen Urfarbe. Zur Berechnung der Buntfunktionen müssen die unkorrigierten Wellenlängen der gleichhellen Munsell-Farben benutzt werden.

Wir benutzen zur Berechnung der Transformationskoeffizienten vom System (X,Y,Z) ins System (X_1, X_2, X_3) die Wellenlängen

$$(\lambda_Y, \lambda_R, \lambda_B, \lambda_G) = (574, 494, 475, 503)$$

Es gilt (vergl. 2.1;11)

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.4139 & 1.4571 & -2.4046 \\ 2.9797 & -2.6662 & -0.0960 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = (b_{ij}) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad (4.2;1)$$

Die Umkehrung lautet

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9093 & -0.0133 & 0.3338 \\ 1.0000 & 0 & 0 \\ 0.4494 & -0.4136 & -0.0574 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = (a_{ij}) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \quad (4.2;2)$$

Als Transformationsformel zwischen den Farborten der Helligkeitsfarbtafel

$$p_i = \frac{X_i}{X_1} \quad (i = 2,3) \quad (4.2;3)$$

und den Farborten der Schwerpunktsfarbtafel

$$x = \frac{X}{X+Y+Z}, \quad y = \frac{Y}{X+Y+Z} \quad (4.2;5-6)$$

folgt durch einfache Umkehrung

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} P_2 & a_{13} P_3 \\ a_{21} & a_{22} P_2 & a_{23} P_3 \\ a_{31} & a_{32} P_2 & a_{33} P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \\ X_1 \end{pmatrix} \quad (4.2;7)$$

Durch Einsetzen in (4.2;5-6) ergibt sich

$$X = \frac{a_{11} + a_{12} P_2 + a_{13} P_3}{\sum_{j=1}^3 a_{j1} + \sum_{j=1}^3 a_{j2} P_2 + \sum_{j=1}^3 a_{j3} P_3} = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{12} P_2 + \alpha_{13} P_3}{\alpha_{31} + \alpha_{32} P_2 + \alpha_{33} P_3} \quad (4.2;8-9)$$

$$Y = \frac{a_{21} + a_{22} P_2 + a_{23} P_3}{\sum_{j=1}^3 a_{j1} + \sum_{j=1}^3 a_{j2} P_2 + \sum_{j=1}^3 a_{j3} P_3} = \frac{\alpha_{21} + \alpha_{22} P_2 + \alpha_{23} P_3}{\alpha_{31} + \alpha_{32} P_2 + \alpha_{33} P_3}$$

wobei

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .9093 & -.0133 & .3338 \\ 1. & 0. & 0. \\ 2.3587 & -.4269 & .2754 \end{pmatrix} \quad (4.2;10)$$

Für die umgekehrte Transformation erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \frac{X + Y + Z}{Y} \cdot (b_{ij}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.2;11)$$

und wegen $z = 1 - x - y$ folgt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{y} \begin{pmatrix} b_{11} - b_{13} & b_{12} - b_{13} & b_{13} \\ b_{21} - b_{23} & b_{22} - b_{23} & b_{23} \\ b_{31} - b_{33} & b_{32} - b_{33} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.2;12)$$

Wir setzen

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} - b_{13} & b_{12} - b_{13} & b_{13} \\ b_{21} - b_{23} & b_{22} - b_{23} & b_{23} \\ b_{31} - b_{33} & b_{32} - b_{33} & b_{33} \end{pmatrix} \quad (4.2;13)$$

und erhalten

$$p_2 = \frac{1}{y} (\beta_{21} x + \beta_{22} y + \beta_{23}) \quad (4.2;14-15)$$

$$p_3 = \frac{1}{y} (\beta_{31} x + \beta_{32} y + \beta_{33})$$

wobei

$$\begin{pmatrix} \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.9907 & 3.8617 & -2.4046 \\ 3.0757 & -2.5702 & -0.0960 \end{pmatrix} \quad (4.2;16)$$

Durch die angegebenen Gleichungen sind festgelegt:

- a) die Transformationen vom CIE-System X, Y, Z auf das Urfarben-system (X_1, X_2, X_3) ,
- b) die Transformationen der CIE-Schwerpunktsfarbtafelkoordinaten (x, y) auf die Sättigungskoordinaten (p_2, p_3) der Helligkeitsfarbtafel im Urfarbensystem,
- c) die Umkehrungen beider Transformationen.

Die Unbunt- und Buntfunktionen $\tau_i(\lambda)$ sind in (2.2;Abb.2) dargestellt, die Sättigungen $p_i(\lambda) = \tau_i(\lambda)/\tau_1(\lambda)$ der Spektralfarben in (2.2;Abb.4) (Helligkeitsfarbtafel).

Für Lichtart C im Umfeld $(x, y) = (.3101, .3162)$ ergeben sich die Sättigungskordinaten

$$[p_2(u), p_3(u)] = (-1.7907, .1425) \quad (4.2;17)$$

Diese sind in Abb.2 eingezeichnet. Bei einer Normierung der Helligkeit auf $Y = 100$ für das Umfeld ergibt sich weiter

$$[x_1(u), x_2(u), x_3(u)] = (100., -179.07, 14.25) \quad (4.2;18)$$

Die Buntsignale $x_2(u)$ und $x_3(u)$ sowie die Sättigungssignale $p_2(u)$ und $p_3(u)$ des unbunten Umfeldes sind also verschieden von Null. Sie müssen durch die "Adaptationssignale" kompensiert werden (Uebergang zum System*).

Die "Adaptationssignale" hängen vom Umfeld U und der Relativsättigung δ_F^* der Infeldfarbe F ab. Wir wollen annehmen, dass die Relativsättigung entlang der Farbreihen gleichen Bunttons (Geraden im System *) gemessen wird. Es würde sich nur im gelben Spektralbereich ein merklicher Unterschied ergeben, wenn wir statt δ^* die Relativsättigung δ der Farbe gleicher dominanter Wellenlänge (Gerade im Ausgangssystem) benutzen. Die Benutzung von δ^* ist willkürlich und muss später überprüft werden.

Die Buntkoordinaten von Farben F werden durch "Adaptationssignale" des Umfeldes U korrigiert (Uebergang zum System *). Es gilt

$$\begin{aligned} x_i^*(F, u) &= \int \psi_i(\lambda) f(\lambda) d\lambda - f(\delta_F^*) \int \psi_i(\lambda) u(\lambda) d\lambda \\ &= x_i(F) - f(\delta_F^*) \cdot x_i(u) \end{aligned} \quad (4.2;19)$$

mit $f(\delta_F^* = 1) = 0$

$f(\delta_F^* = 0) = 1$

$\delta^* = \text{Relativsättigung}$

$$= \frac{x_i^*(F, u)}{x_i^*(\lambda, u)}$$

(4.2;21-22)

(4.2;20)

Für die Farbborte (p_2^*, p_3^*) helligkeitsgleicher Farben
 $(X_1^*(T, u) = X_1(T, u) = \text{const.})$ im helligkeitsgleichen Umfeld
 $(X_1(T, u) = X_1(u))$ folgt wegen

$$p_i^*(T, u) = \frac{X_i^*(T, u)}{X_1(T, u)} \quad (i = 2, 3) \quad (4.2; 23)$$

$$p_i^*(T, u) = p_i(T, u) - f(\delta_T^*) p_i(u) \quad (4.2; 24)$$

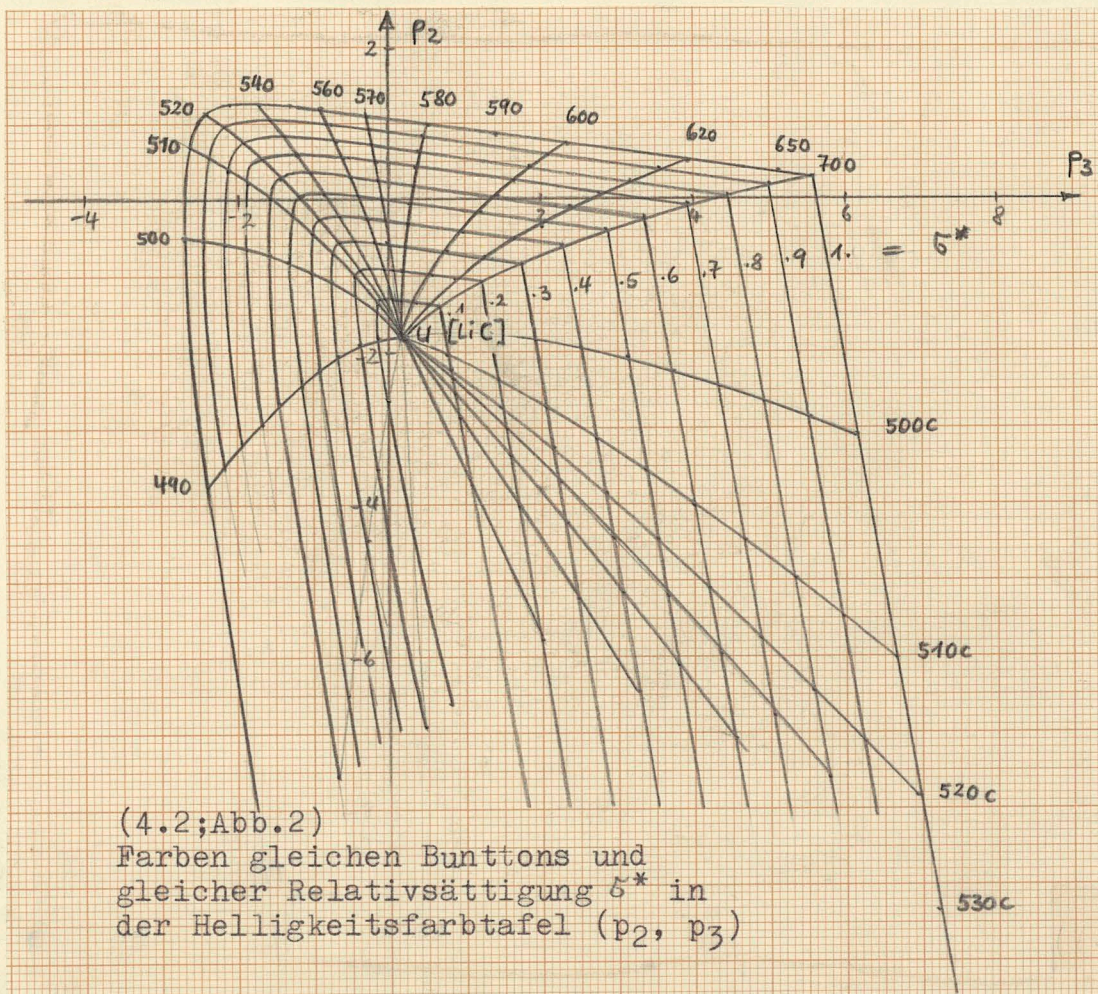
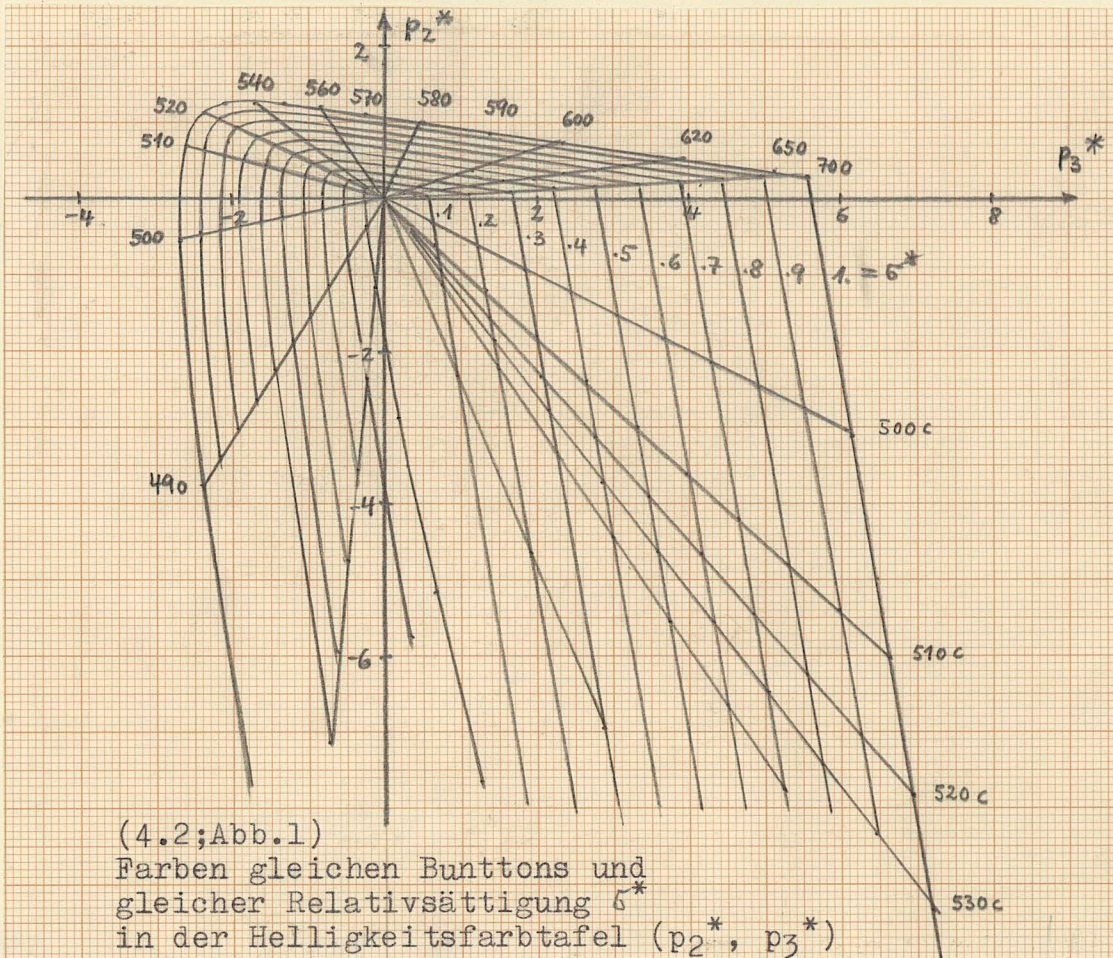
Es wird sich ergeben, dass der Umfeldeinfluss auf Infeldfarben mit abnehmender Relativsättigung δ_F^* ungefähr kubisch zunimmt. Wir beschreiben dieses experimentelle Ergebnis durch die Hyperbelfunktion

$$f(\delta_F^*) = \left[1 - \frac{\delta_F^* (1 + .8)}{\delta_F^* + .8} \right] \quad (4.2; 25)$$

Diese Funktion erfüllt unsere Forderungen

$$f(\delta_F^*) = 0 \quad \text{für } \delta_F^* = 1 \quad \text{und} \quad f(\delta_F^*) = 1 \quad \text{für } \delta_F^* = 0.$$

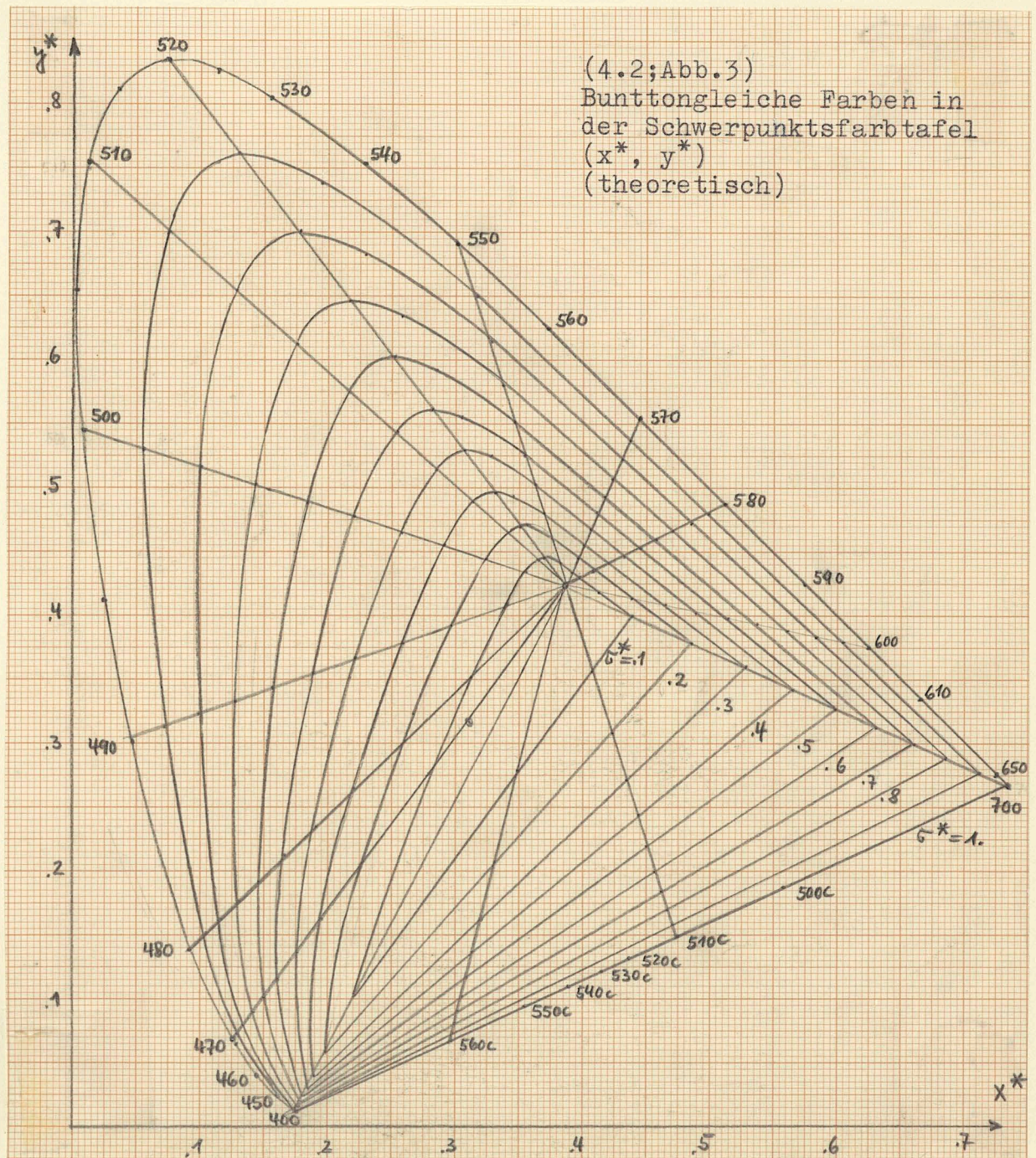
Dann werden die Punkte der bunttongleichen Farben (Geraden im System p_2^*, p_3^*) in Kurven im System (p_2, p_3) abgebildet. Die Kurven gleicher Relativsättigung δ^* werden auch im System (p_2, p_3) eingetragen.

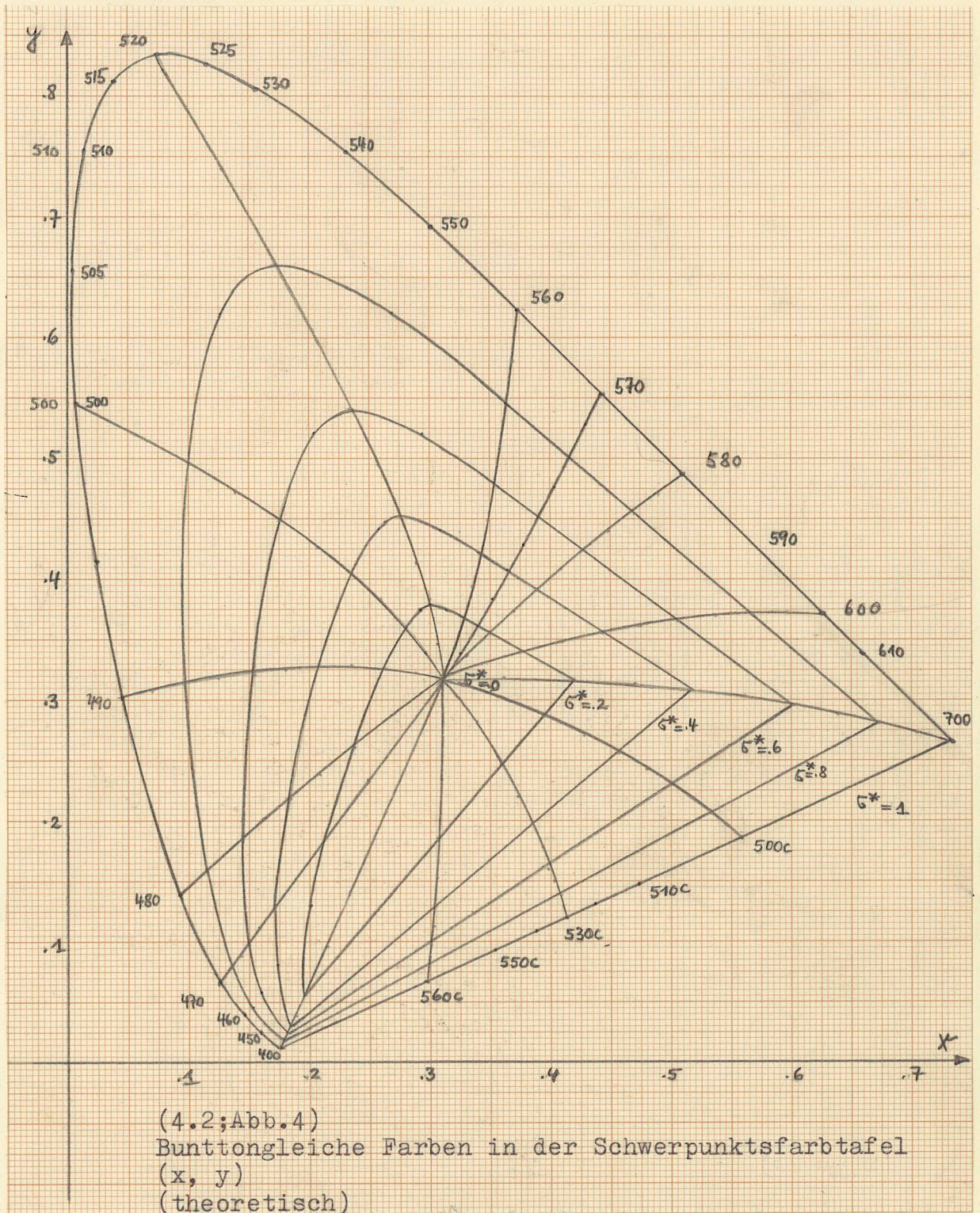


Beide Diagramme können durch die Transformationsgleichungen (4.2;8-9) in die entsprechenden Schwerpunktsfarbtafeln abgebildet werden. Die Transformationen $(p_2, p_3) \longleftrightarrow (x, y)$ und $(p_2^*, p_3^*) \longleftrightarrow (x^*, y^*)$ werden mit den gleichen Transformationskoeffizienten α_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) durchgeführt werden.

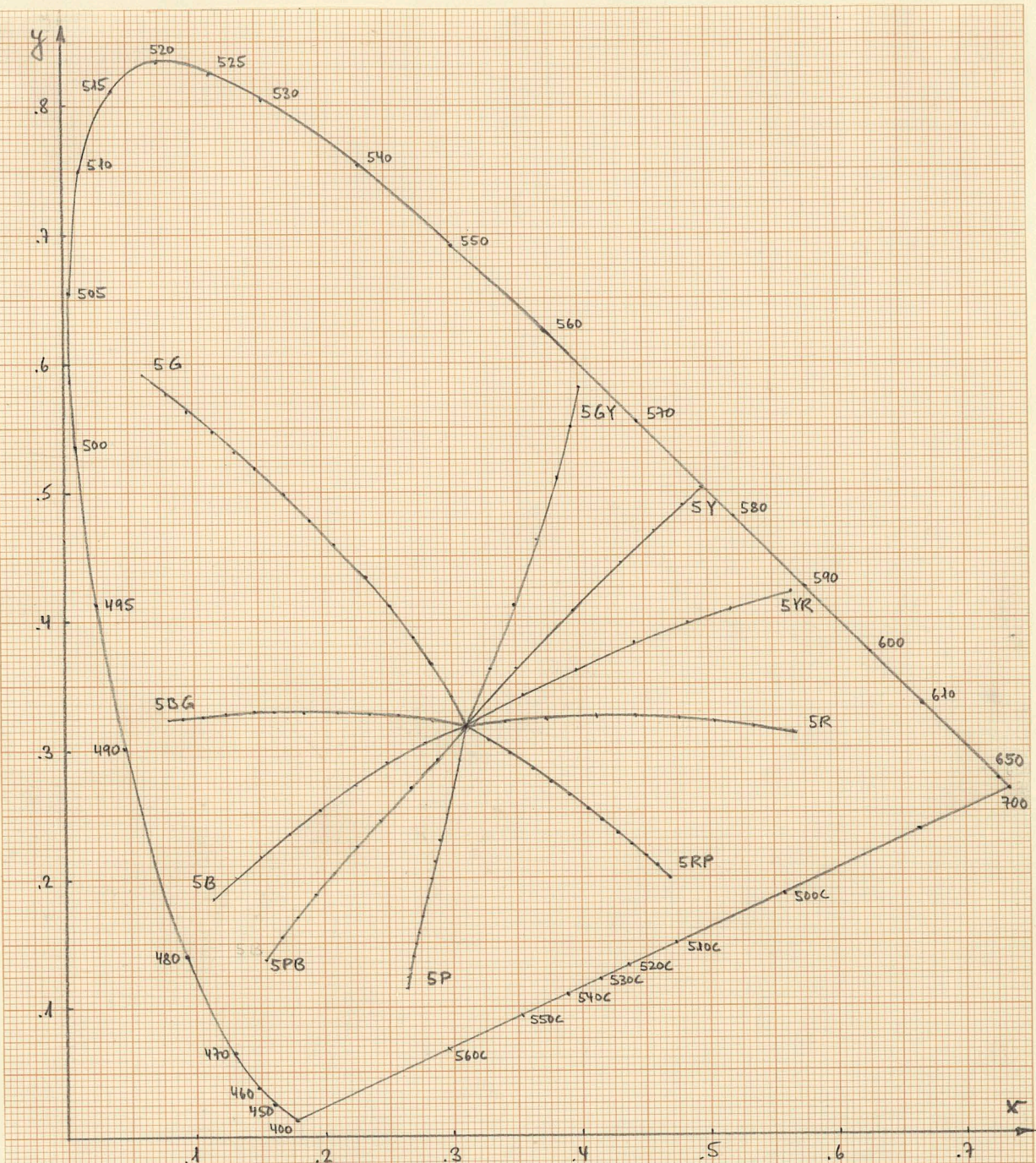
In der der Empfindung "Buntton" entsprechenden Schwerpunktsfarbtafel (x^*, y^*) liegen die Farborte bunttongleicher Farben auf Geraden. Die "Adaptationssignale", die den Umfeldeinfluss auf den Buntton der Infeldfarbe beschreiben, wurden berücksichtigt (Abb.3).

Werden sie nicht berücksichtigt, so liegen die Farben gleichen Bunttons auf Kurven (Abb.4).





Die experimentellen Ergebnisse bunttongleicher Farben für Value 5 (Infeld- \approx Umfeldhelligkeit) des MUNSELL-Systems zeigt Abb. 5.



(4.2; Abb. 5)

Bunttongleiche Farben in der Schwerpunktsfarbtafel (x,y)
(experimentell, MUNSELL-System, Value 5).

Die schon gute Uebereinstimmung von Experiment und Theorie kann durch geeignete Funktionen $f(\delta_F^*)$ sicher noch verbessert werden.

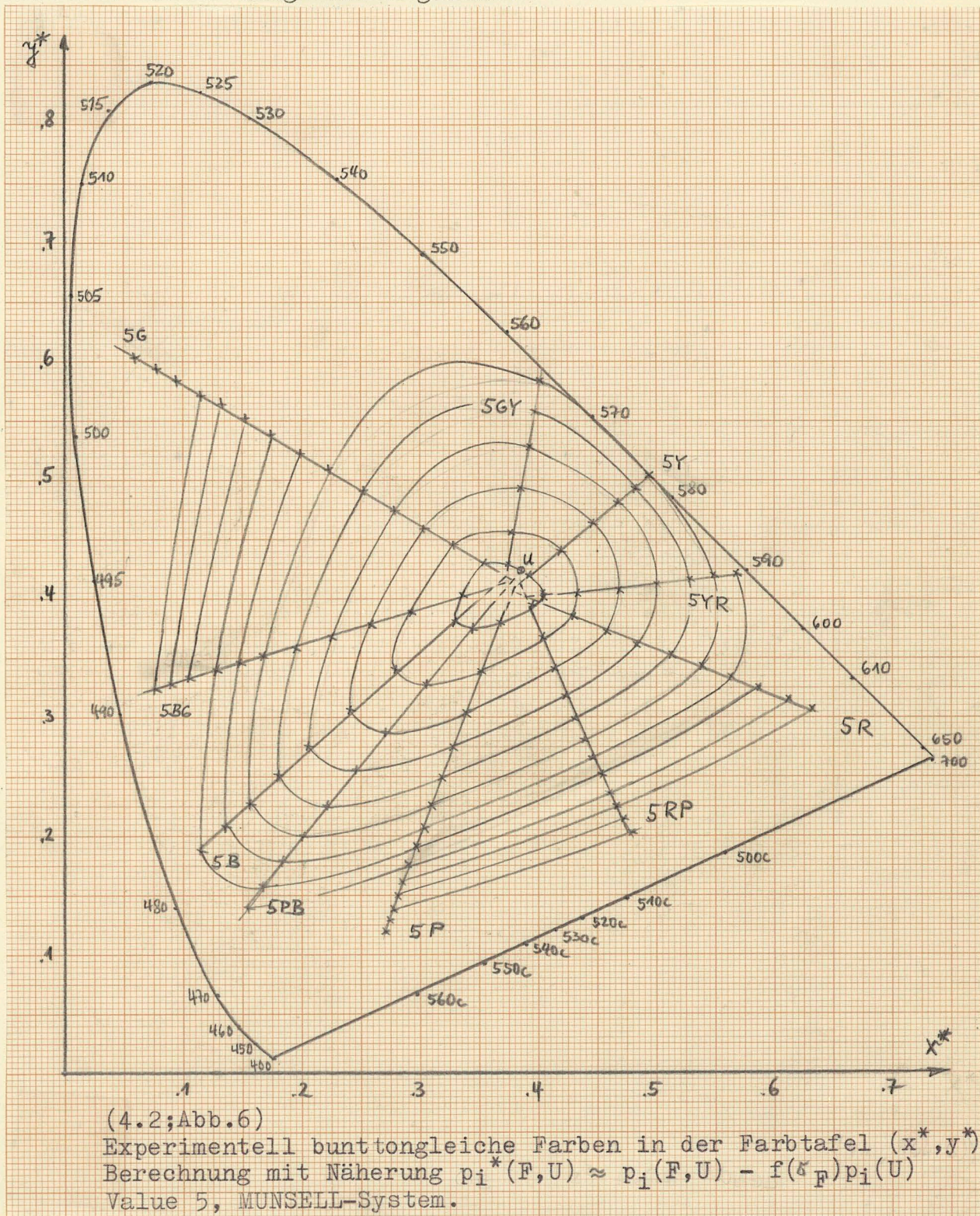
Die Transformation der experimentellen Farbt \bar{a} fel (x,y) in die entsprechende Farbt \bar{a} fel (x^*,y^*) kann graphisch durch Vergleich der

Farbtafeln $(x,y) \rightarrow (x^*,y^*)$ in Abb. 4 und 3 erfolgen.

Eine näherungsweise Transformation ist möglich, wenn man die Relativsättigung $\delta_F \approx \delta_F^*$ berechnet und $p_i^*(F,U)$ durch die Näherung

$$p_i^*(F,U) \approx p_i(F,U) - f(\delta_F) p_i(U) \quad (4.2;26)$$

ersetzt. Abb. 6 zeigt das Ergebnis.



Man sieht, dass experimentell bunttongleiche Farben ungefähr auf Geraden liegen. Die Abweichungen in der Umgebung von Unbunt U sind wahrscheinlich eine Folge der benutzten Näherung.

Die exakte Transformation $(x, y) \rightarrow (x^*, y^*)$ beziehungsweise $(p_2, p_3) \rightarrow (p_2^*, p_3^*)$ lässt sich durch schrittweise Verbesserung der mit der Näherung (4.2;26) berechneten Anfangswerte durchführen. Es werden folgende Gleichungen benutzt

$$\begin{aligned} F_1[p_2^*(T, U), p_3^*(T, U), p_2^*(\lambda)] &= p_2(T, U) - p_2^*(T, U) - f(\delta^*) p_2(U) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.2;27)$$

$$\begin{aligned} F_2 \left[\begin{array}{c} \uparrow \\ \dots \end{array} \right] &= p_3(T, U) - p_3^*(T, U) - f(\delta^*) p_3(U) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.2;28)$$

$$\begin{aligned} F_3 \left[\begin{array}{c} \uparrow \\ \dots \end{array} \right] &= p_3^*(T, U) p_2^*(\lambda) - p_2^*(T, U) p_3^*(\lambda) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.2;29)$$

mit

$$f(\delta^*) = \left[1 - \frac{\delta^*(1 + .8)}{\delta^* + .8} \right] \quad (4.2;30)$$

$$= .8 \frac{p_2^*(\lambda) - p_2^*(T, U)}{p_2^*(T, U) + .8 p_2^*(T, U)} \quad (4.2;31)$$

und

$$p_3^*(\lambda) = b_0 + b_1 p_2^*(\lambda) \quad (4.2;32)$$

Die von den 3 Unbekannten

$$A1 = p_2^*(T, U) \quad (4.2;33-35)$$

$$A2 = p_3^*(T, U)$$

$$A3 = p_2^*(\lambda)$$

abhängigen Funktionen F_i ($i = 1, 2, 3$) werden an der Stelle $A1^0, A2^0, A3^0$ entwickelt. Die Anfangswerte $A1^0, A2^0, A3^0$ berechnen sich mit der Näherung (4.2;26). Es gilt näherungsweise

$$F_1(A1, A2, A3) - F_1(A1^0, A2^0, A3^0) = \frac{\partial F_1}{\partial A_1} dA_1 + \frac{\partial F_1}{\partial A_2} dA_2 + \frac{\partial F_1}{\partial A_3} dA_3$$

$$F_2(\dots) - F_1(\dots) = \frac{\partial F_2}{\partial A_1} dA_1 + \frac{\partial F_2}{\partial A_2} dA_2 + \frac{\partial F_2}{\partial A_3} dA_3 \quad (4.2;36-38)$$

$$F_3(\dots) - F_1(\dots) = \frac{\partial F_3}{\partial A_1} dA_1 + \frac{\partial F_3}{\partial A_2} dA_2 + \frac{\partial F_3}{\partial A_3} dA_3$$

Die partiellen Ableitungen der Funktionen F_1, F_2 und F_3 an der Stelle $A1^0, A2^0, A3^0$ werden berechnet. Das lineare Gleichungssystem liefert die Korrekturen dA_1, dA_2, dA_3 , welche die Anfangswerte verbessern. Es gilt

$$A1^1 = A1^0 + dA_1 \quad (4.2;39-41)$$

$$A2^1 = A2^0 + dA_2$$

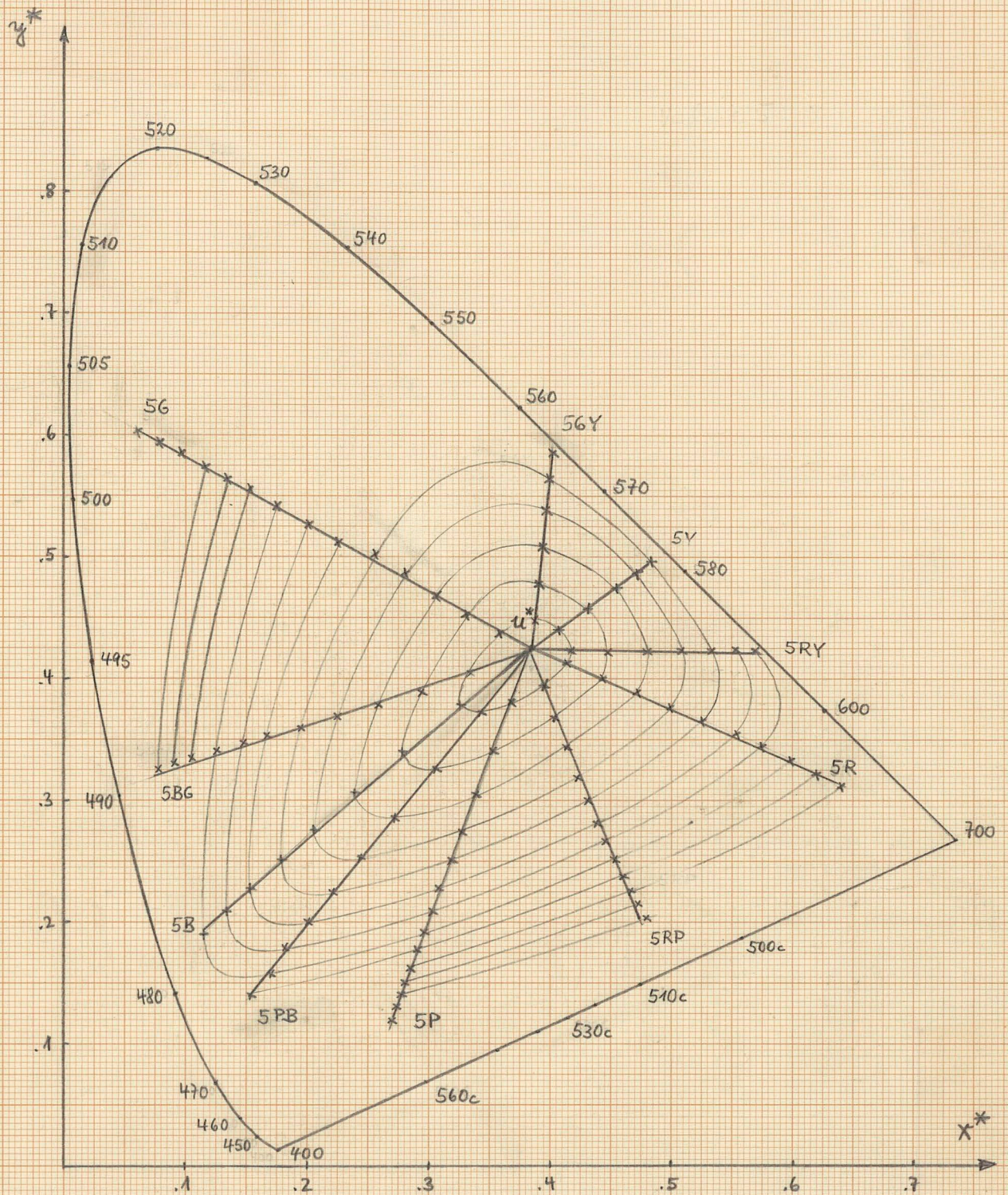
$$A3^1 = A3^0 + dA_3$$

Das Verfahren wird mit den verbesserten Anfangswerten $A1^1, A2^1, A3^1$ wiederholt und so lange fortgesetzt, bis die Korrekturen dA_1, dA_2, dA_3 genügend klein werden. Abb. 7 zeigt das Ergebnis für Value 5 des MUNSELL-Systems.

Man sieht, dass experimentell bunttongleiche Farben gut auf Geraden liegen, die sich im Farbort

$$(x_n, y_n) = (.385, .425) \quad (4.2;42)$$

(Kreuzungspunkt der Urfarbverbindungslienien) treffen. Die Transformation enthält nur einen einzigen freien Parameter in $f(5^*)$, der zu .8 festgelegt wurde. Diese Wahl entspricht näherungsweise kubischem Umfeldeinfluss auf die Infeldfarbe.



(2.4; Abb. 7)

Experimentell bunttongleiche Farben in der Farbtafel (x^*, y^*)
 Berechnet mit Gleichung $p_i^*(F, U) = p_i(F, U) - f(\xi_F^*) p_i(U)$
 Value 5, MUNSELL-System.

Wahrscheinlich lässt sich noch eine Verbesserung durch Variation dieses Parameters erreichen. Auch die Berücksichtigung des von Lichtart C etwas verschiedenen experimentellen Umfeldes (siehe auch Kapitel 4.3) sollte noch eine Verbesserung bringen.

Die auf Geraden liegenden Farborte (x^*, y^*) empfindungsgemäss bunttongleicher Farben erlauben es, künftig den Buntton von Farben durch die empfindungsgemäss bunttongleiche Wellenlänge zu bezeichnen. Wir werden sie λ_d^* nennen. Alle Farben mit gleichem λ_d^* sind im Idealfall bunttongleich, während die bisher benutzte sogenannte bunttongleiche Wellenlänge λ_d wegen der Krümmung der Farborte (x, y) bunttongleicher Farben variiert. Die Wellenlänge λ_d^* ist daher das empfindungsgemässe Korrelat für Bunttongleichheit.

Tabelle 3 enthält für bunttongleiche Farben des MUNSSELL-Systems von Value 5 die Wellenlängen λ_d (berechnet in der Farbtafel (x, y) in Bezug auf (x_u, y_u)) und λ_d^* (berechnet in der Farbtafel (x^*, y^*) in Bezug auf (x_n, y_n)).⁴⁾

Man sieht, dass die Verbesserung der Streuung erheblich ist (Faktor 2-5). Für den Buntton 5 R scheint keine so grosse Verbesserung vorzuliegen, doch muss man berücksichtigen, dass das Unterscheidungsvermögen zwischen 640 und 665 nm wesentlich kleiner ist als zwischen 605 und 630 nm. Man betrachtet daher am besten die Streuung der "kompensativen" Wellenlängen. Hier wird die Verbesserung deutlich (Tabelle 4).

4) Rechenverfahren: siehe K. Richter, Programmierung farbmetrischer Berechnungen, Die Farbe 14 (1965), S.275-286.

Bunt- ton	Chroma C	x	y	λ_d	x^*	y^*	λ_d^*
5 B	2	.2794	.3032	485.4	.3263	.3778	483.5
	4	.2493	.2879	484.9	.2780	.3395	483.4
	6	.2215	.2701	484.2	.2389	.3055	483.0
	8	.1958	.2519	483.6	.2060	.2759	482.7
	10	.1729	.2347	483.2	.1786	.2507	482.5
	12	.1505	.2172	482.8	.1533	.2272	482.3
	14	.1320	.2021	482.5	.1333	.2082	482.1
	16	.1132	.1863	482.2	.1136	.1894	482.0
5 G	2	.2978	.3392	515.4	.3582	.4373	502.5
	4	.2841	.3628	514.3	.3324	.4525	503.4
	6	.2690	.3860	513.0	.3074	.4683	503.9
	8	.2511	.4107	511.7	.2807	.4856	504.3
	10	.2329	.4331	510.4	.2556	.5013	504.3
	12	.2104	.4578	509.1	.2248	.5119	503.6
	14	.1912	.4773	508.1	.2016	.5257	503.6
	16	.1695	.4981	507.2	.1764	.5404	503.7
	18	.1489	.5171	506.5	.1532	.5539	503.8
	20	.1318	.5321	506.1	.1344	.5644	503.7
	22	.1144	.5463	505.5	.1157	.5740	503.7
	24	.0953	.5628	505.1	.0956	.5857	503.7
	26	.0784	.5761	504.8	.0781	.5947	503.7
	28	.0609	.5898	504.4	.0602	.6041	503.6
5 Y	2	.3500	.3620	575.7	.4062	.4399	577.0
	4	.3925	.4057	576.4	.4310	.4572	577.4
	6	.4302	.4435	576.8	.4539	.4743	577.3
	8	.4579	.4692	577.1	.4715	.4864	577.4
	10	.4777	.4876	577.2	.4841	.4956	577.4
	12	.4932	.5019	577.4	.4939	.5028	577.4
5 R	2	.3392	.3192	605.7	.4124	.4126	640.2
	4	.3740	.3220	606.8	.4431	.4000	635.9
	6	.4078	.3238	607.9	.4716	.3886	633.1
	8	.4413	.3240	609.7	.4993	.3773	632.7
	10	.4747	.3227	612.0	.5265	.3660	633.4
	12	.5071	.3194	615.1	.5528	.3543	636.1
	14	.5341	.3158	617.9	.5745	.3445	638.6
	16	.5637	.3102	622.1	.5984	.3329	643.3
	18	.5918	.3038	627.2	.6212	.3215	649.9
	20	.6142	.2970	633.3	.6396	.3114	664.7

(4.2;Tabelle 3)
 Farborte (x,y) und (x^* , y^*) sowie
 Wellenlängen λ_d und λ_d^* des
 MUNSELL-Systems, Value 5

Chroma	λ_c	λ^*_c	Chroma	λ_c	λ^*_c
2	489.3	501.5	12	490.4	501.4
4	489.5	501.4	14	490.6	501.5
6	489.6	501.4	16	490.9	501.6
8	489.9	501.4	18	491.1	501.8
10	490.1	501.4	20	491.4	501.8

(4.2;Tabelle 4)

Kompensative Wellenlängen des Farbtons 5 R
des MUNSELL-Systems, Value 5.

Insgesamt wird der experimentell gemessene gekrümmte Bunttonverlauf durch die Theorie verständlich. Die Krümmung in der Farbtabelle ist eine logische Folgerung aus der experimentellen Tatsache, dass sich Urrot und Urgrün nicht zu "Weiss" mischen. Es ist keine Theorie des Farbensehens bekannt, welche die Krümmung auf ebenso einfache Art erklären oder mit gleichem Erfolg beschreiben kann. Da die Messergebnisse seit 30 Jahren vorliegen, so ist es umso erfreulicher, dass eine Erklärung gelungen ist. Die Messergebnisse sind weitgehend gesichert, indem das MUNSELL-System doch als Mittel von 3 Millionen Beobachtungen hervorging⁵⁾.

Allerdings ist es fraglich, ob der Umfeldeinfluss auf die Infeldfarbe durch die von uns als Näherung bezeichnete Gleichung

$$p^*(F, u) = p_i(F, u) - f(\delta_F) p_i(u) \quad (4.2;43)$$

(δ gemessen in Bezug auf u)

oder durch

$$p^*(F, u) = p_i(F, u) - f(\delta_F^*) p_i(u) \quad (4.2;44)$$

(δ^* gemessen in Bezug auf n)

5) NEWHALL, SIDNEY M., Preliminary Report of Spacing MUNSELL Colors, JOSA 30, S.626 (1940).

besser beschrieben werden kann. Die entsprechenden Transformationen wurden in Abb. 6 und 7 dargestellt. Die Abweichungen in der Nähe von Unbunt in Abb. 6 können auf die noch nicht berücksichtigte Nullpunktsverschiebung und die Unterschiede zwischen experimentell benutztem Umfeld und Lichtart C zurückzuführen sein (siehe auch Kap. 4.3). Insbesondere ist es zweifelhaft, ob die Kurven bunttongleicher Farben überhaupt im Farbort des Umfeldes enden müssen. Nach der Theorie erhalten nämlich alle "grauen" Farben vom Farbort des Umfeldes Restbuntimpulse, wenn sie heller oder dunkler als das Umfeld sind. Eventuell müssen die Kurven bunttongleicher Farben in einem Farbort enden, der keinen Buntimpuls erzeugt und der verschieden ist vom Farbort des "grauen" Umfeldes. Hier ergeben sich theoretische Voraussagen, die experimentell überprüft werden müssen.

4.3 Beschreibung der exzentrischen Verschiebung der Chroma-Ellipsen

Wir transformieren die Farborte (x,y) der Chroma 2-Farben (kleinste Chroma) des MUNSELL-Systems in die Helligkeitsfarbtafel (p_2, p_3) . Die Farborte (x,y) werden aus ¹⁾ entnommen. Es gilt

$$p_2 = \frac{1}{y} (\beta_{21} x + \beta_{22} y + \beta_{23}) \quad (4.3;1-2)$$

$$p_3 = \frac{1}{y} (\beta_{31} x + \beta_{32} y + \beta_{33})$$

mit den in Kapitel 4.2 angegebenen Transformationskoeffizienten β_{ij} .

Man findet, dass die experimentell ermittelten Farborte (x,y) für alle Helligkeitsebenen (Value 1,2,...9) des MUNSELL-Systems in sehr guter Näherung auf Kreisen liegen, wenn p_2 und p_3 mit den Masstabsfaktoren $n_2 = 1$ und $n_3 = 2.8$ multipliziert werden.

In Abb.1 sind daher die Koordinaten $n_2 p_2$ und $n_3 p_3$ gewählt worden.

Die Uebereinstimmung der experimentellen Punkte mit den eingezeichneten Kreisen ist ein erster Hinweis, dass auch die Chroma-Stufung mit den Koordinaten des Urfarbensystems zusammenhängen.

Die Abb.1 liefert eine ganze Reihe von Aussagen über den Zusammenhang der Chroma-Stufung mit den Koordinaten (X_1, X_2, X_3) bzw.

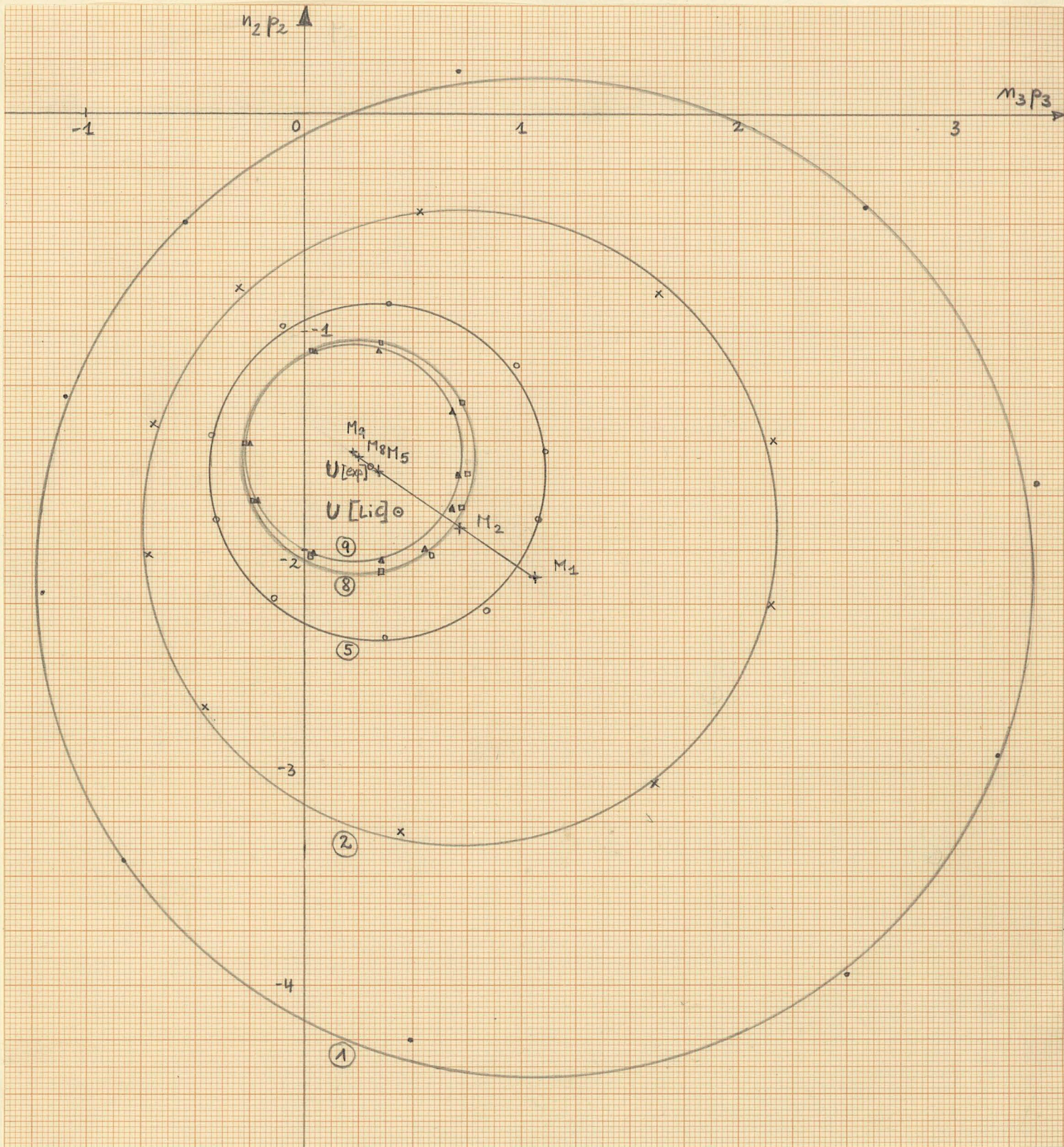
$p_i = X_i/X_1$. Wir fassen diese Aussagen durch folgende Gleichungen zusammen. Es gilt für kleine Chroma

$$\hat{C}_2(\bar{T}, U, \mathbb{M}_Y) = c_Y \cdot n_2 \cdot p_2(\bar{T}, \mathbb{M}_Y) \quad (4.3;3-5)$$

$$\hat{C}_3(\bar{T}, U, \mathbb{M}_Y) = c_Y \cdot n_3 \cdot p_3(\bar{T}, \mathbb{M}_Y)$$

$$\hat{C}_r(\bar{T}, U, \mathbb{M}_Y) = c_Y \sqrt{n_2^2 p_2^2(\bar{T}, \mathbb{M}_Y) + n_3^2 p_3^2(\bar{T}, \mathbb{M}_Y)}$$

1) G. Wyszecki and W.S. Stiles, Color Science, 1967, Table 6.9, S.488-500.



(4.3; Abb. 1)

Farben von Chroma 2 des MUNSELL-Systems
(Value 1, 2, 5, 8, 9) in der Helligkeitsfarbtafel
(p_2, p_3). Maßstabsfaktoren $n_2 = 1$, $n_3 = 2.8$.
(experimentell)

Die Konstanten n_2 und n_3 sind die erwähnten Masstabsfaktoren $n_2 = 1$, $n_3 = 2.8$. Die Sättigungen $p_i(F, M_Y)$ sind die Sättigungsdifferenzen zum Kreismittelpunkt M_Y , der sich mit der Helligkeit $Y(F)$ der Infeldfarbe nahezu auf einer Geraden verschiebt.

Es ist

$$p_i(F, M_Y) = p_i(F) - p_i(M_Y) \quad (i = 2, 3) \quad (4.3; 6)$$

Die Konstanten c_Y sind von der Helligkeit der Infeldfarbe abhängig und müssen so gewählt werden, dass sich für alle Helligkeitsebenen der experimentell zugeordnete Wert $\hat{C}_r(F, U, M) = 2$ ergibt.

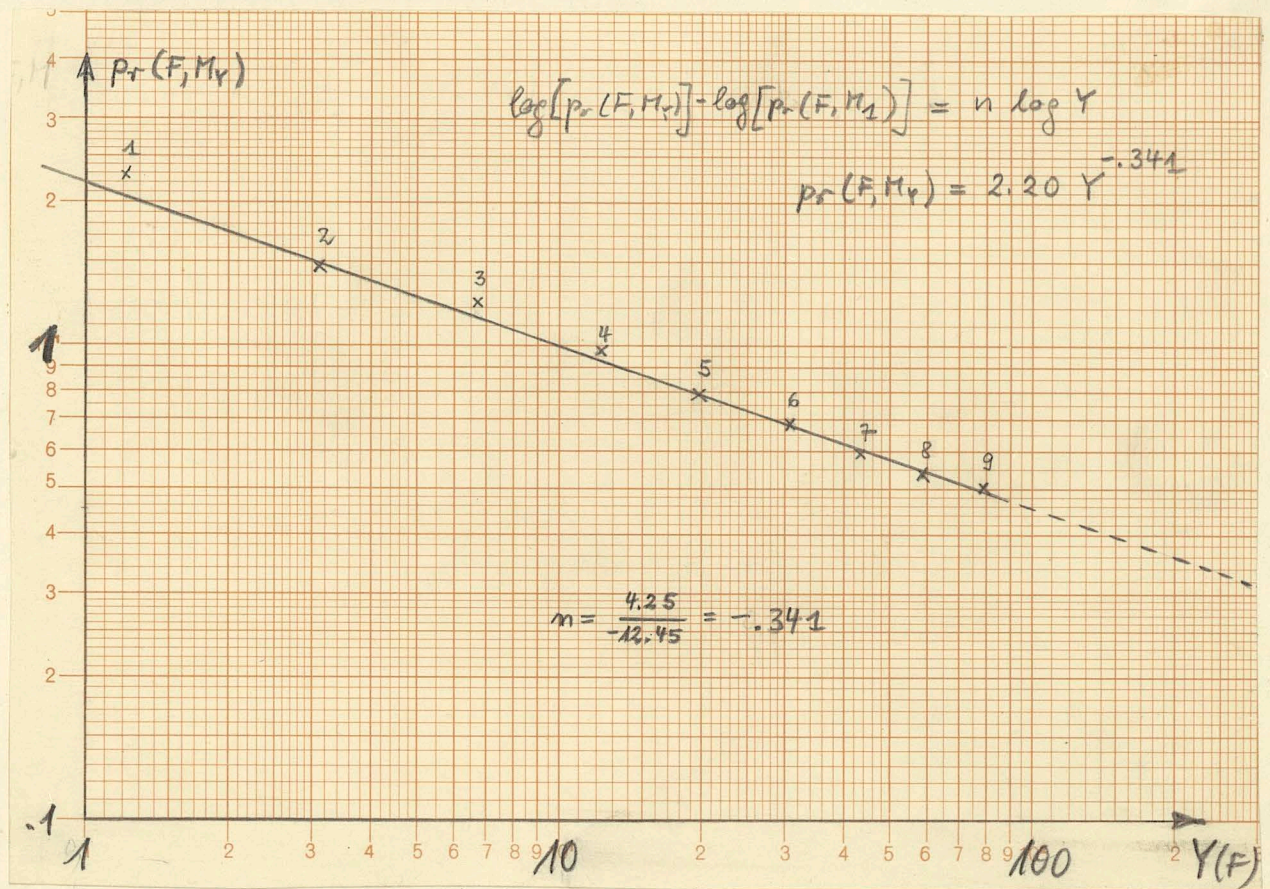
Zur quantitativen Ermittlung der Verschiebung des Kreismittelpunktes M_Y und des funktionellen Zusammenhangs von c_Y mit der Helligkeit $Y(F)$ stellen wir die Daten aus Abb. 1 in Tabelle 1 zusammen. Die Daten für Value 3, 4, 6, 7 (nicht eingezeichnet) und des zur Stufung benutzten Umfeldes wurden ergänzt.

V	Y	$n_2 p_2(M)$	$n_3 p_3(M)$	$n_2 p_2(U)$	$n_3 p_3(U)$	$p_r(F, M)$
1.000	1.210	-2.130	1.060	-1.623	.310	2.29
2.000	3.130	-1.900	.720	-1.623	.310	1.46
3.000	6.560	-1.780	.560	-1.623	.310	1.24
4.000	12.000	-1.690	.430	-1.623	.310	.98
5.000	19.770	-1.640	.340	-1.623	.310	.78
5.570	25.300	-1.623	.310	-1.623	.310	— (Umfeld)
6.000	30.050	-1.610	.300	-1.623	.310	.69
7.000	43.060	-1.590	.270	-1.623	.310	.60
8.000	59.100	-1.570	.250	-1.623	.310	.54
9.000	78.660	-1.550	.230	-1.623	.310	.50

(4.3; Tabelle 1)

Wichtige Daten der Abbildung 1, ergänzt für Value 3, 4, 6, 7 (nicht eingezeichnet) und für das Umfeld ($Y=25.3$, $x=.3140$, $y=.3244$).

Den Zusammenhang von c_Y und Y ermitteln wir aus Abb.2.



(4.3; Abb.2)

Zusammenhang zwischen $p_r(F, M)$ und $Y(F)$.
Daten aus Tabelle 1.

Es gilt nach Abb.2

$$\log p_r(F, M_Y) = \log p_r(F, M_1) + n \log Y(F) \quad (4.3;7)$$

mit

$$\log p_r(F, M_1) = 2.20 \quad (4.3;8)$$

$$n = -.341 \quad (4.3;9)$$

oder

$$p_r(F, M_Y) = p_r(F, M_1) \cdot Y(F)^n \quad (4.3;10)$$

Andererseits soll gelten

$$p_r(F, M_Y) = \frac{2 [\text{chroma-Stufen}]}{c_Y} \quad (4.3;11)$$

Durch Vergleich erhalten wir

$$C_Y = \frac{2}{P_r(F, m_1)} Y^{-n}$$

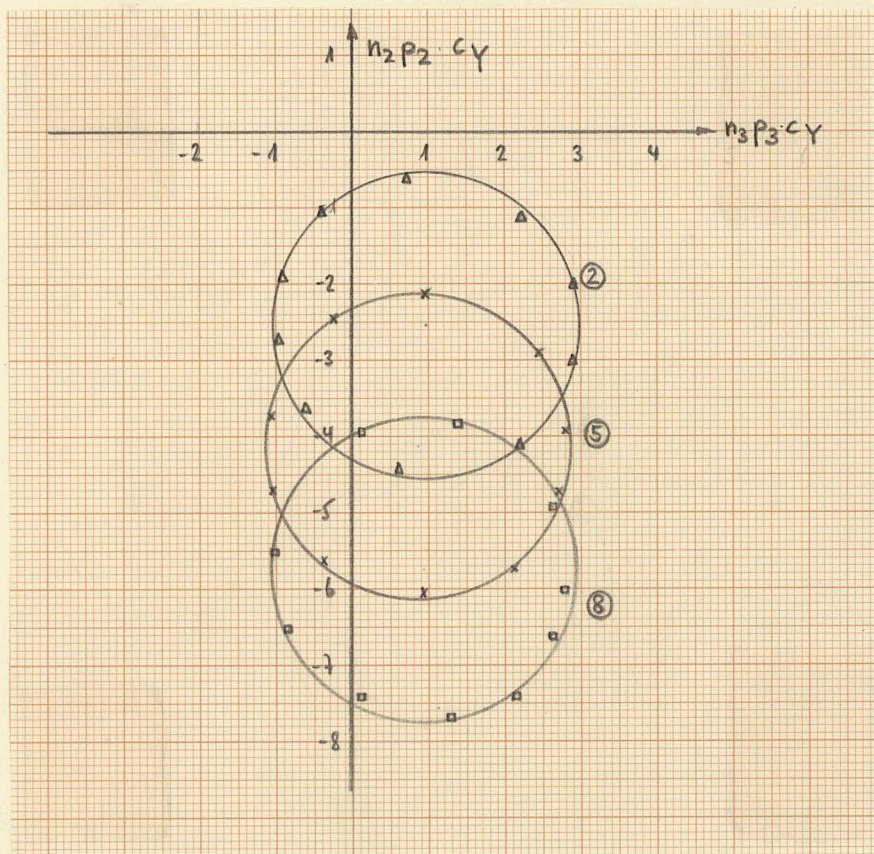
(4.3;12)

$$= 0.91 \cdot Y^{0.341}$$

(4.3;13)

Wir beschränken uns im folgenden auf die Darstellung der Experimente in den Value-Ebenen 2,5,8. Die Verhältnisse in den übrigen Value-Ebenen lassen sich leicht durch Interpolation und Extrapolation überblicken.

In Abb.3 werden die Farben von Chroma 2 im Koordinatensystem $c_{Yn_i p_i}(F)$ ($i=1,2,3$) dargestellt.



(4.3;Abb.3)

Farben von Chroma 2 des MUNSSELL-Systems (Value 2,5,8) im Koordinatensystem $c_{Yn_2 p_2}(F)$, $c_{Yn_3 p_3}(F)$. Masstabsfaktoren $n_2 = 1$, $n_3 = 2.8$ (experimentell)

Man sieht, dass die experimentell ermittelten Farben gleichen Chromas verschiedener Value-Ebenen sehr gut auf Kreisen von gleichem Radius liegen.

Die für die folgenden Untersuchungen sehr wichtigen Daten der Abb.3 enthält Tabelle 2.

allgemeine Daten	MUNSELL Buntton	$c_{Yn_2P_2}(F)$	$c_{Yn_3P_3}(F)$	$c_{Yn_2P_2}(F, M_Y)$	$c_{Yn_3P_3}(F, M_Y)$
<u>Value 2</u>	5 PB	-4.433	- .586	-1.881	- .380
	5 B	-3.669	- .623	-1.118	-1.589
$c_{Yn_2P_2}(M_Y)$	5 BG	-2.714	- .977	- .162	-1.944
= -2.54	5 G	-1.912	- .929	.639	-1.895
	5 GY	-1.078	- .405	1.473	-1.371
	5 Y	- .609	.713	1.942	- .253
$c_{Yn_3P_3}(M_Y)$	5 YR	-1.120	2.206	1.431	1.240
= .96	5 R	-2.024	2.904	.530	1.934
	5 RP	-2.258	2.152	- .480	1.923
	5 P	-4.123	2.165	-1.571	1.199
<u>Value 5</u>	5 PB	-6.047	.944	-1.919	.086
	5 B	-5.626	- .371	-1.497	-1.228
$c_{Yn_2P_2}(M_Y)$	5 BG	-4.701	-1.038	- .573	-1.894
= -4.13	5 G	-3.725	-1.078	.403	-1.935
	5 GY	-2.475	- .249	1.654	-1.107
	5 Y	-2.155	.975	1.973	.118
$c_{Yn_3P_3}(M_Y)$	5 YR	-2.898	2.432	1.230	1.575
= .86	5 R	-3.918	2.801	.211	1.944
	5 RP	-4.705	2.706	- .576	1.849
	5 P	-5.741	2.118	-1.613	1.261
<u>Value 8</u>	5 PB	-7.690	1.267	-1.948	.351
	5 B	-7.444	.088	-1.702	- .828
$c_{Yn_2P_2}(M_Y)$	5 BG	-6.537	- .885	- .795	-1.801
= -5.75	5 G	-5.536	-1.033	.206	-1.949
	5 GY	-3.955	.106	1.787	- .810
	5 Y	-3.851	1.271	.517	.097
$c_{Yn_3P_3}(M_Y)$	5 YR	-4.912	2.630	.830	1.714
= .93	5 R	-6.044	2.763	- .302	1.846
	5 RP	-6.643	2.631	- .901	1.714
	5 P	-7.415	2.136	-1.674	1.219

(4.3;Tabelle 2)

Farben von Chroma 2 des MUNSELL-Systems (Value 2,5,8) im Koordinatensystem $c_{Yn_iP_i}(F)$ und $c_{Yn_iP_i}(F, M_Y)$ ($i=2,3$).

In Abbildung 4 wird deutlich, wie gut die Farben von Chroma 2 der Value Ebenen 2, 5 und 8 auf einem Kreis liegen.

Es ist jedoch interessant, dass die Farben gleichen Bunttons von verschiedenem Value nicht die gleichen Koordinaten erhalten, sondern systematische Abweichungen auftreten, die wir jetzt erklären und beschreiben wollen.

Diese Abweichungen sind eine Folge der in Kapitel 4.1, Punkt 5) vorausgesagten Verschiebung des Mittelpunktes M chromagleicher Farben gegenüber dem Farbort U des Umfeldes als Funktion der Empfindungshelligkeit \hat{Y} . Die experimentelle Bestätigung der Verschiebung des Mittelpunktes M chromagleicher Farben verschiedenen Values wurde in Abb.1 sichtbar. (Verschiebung von M auf einer Geraden).

Richtung und Lage der Geraden in Bezug auf das Umfeld U von Lichtart C stiess zunächst auf theoretische Schwierigkeiten. Man erwartete nämlich, dass der Farbort des Umfeldes auf der Geraden liegen müsse (siehe 4.1; Abschnitt 5).

Wir müssen berücksichtigen, dass die MUNSELL-Chroma und Hue-Stufungen nicht genau im Umfeld von Lichtart C durchgeführt wurden.

Helligkeit und Farbort des grauen Umfeldes²⁾ wurden in Tabelle 1 angegeben. Aus den Daten von Tabelle 1 und den Masstabsfaktoren c_y errechnen sich die Tabelle 3.

2) Sidney M. Newhall, JOSA 30 (1940), S.622.

V	Y	c_Y	$p_2(M)$	$p_3(M)$	$p_2(U)$	$p_3(U)$	Δp_2	Δp_3
1.000	1.210	.971	-2.130	.378	-1.623	.110	-.506	.267
2.000	3.130	1.342	-1.900	.257	-1.623	.110	-.276	.146
3.000	6.560	1.728	-1.780	.200	-1.623	.110	-.156	.089
4.000	12.000	2.123	-1.690	.153	-1.623	.110	-.066	.042
5.000	19.770	2.517	-1.640	.121	-1.623	.110	-.016	.010
U: 5.570	25.300	2.738	-1.623	.110	-1.623	.110	0.000	0.000
6.000	30.050	2.903	-1.610	.107	-1.623	.110	.013	-.003
7.000	43.060	3.282	-1.590	.096	-1.623	.110	.033	-.014
8.000	59.100	3.657	-1.570	.089	-1.623	.110	.053	-.021
9.000	78.660	4.031	-1.550	.082	-1.623	.110	.073	-.028

V	Y	c_Y	$c_{Y^2}p_2(M)$	$c_{Y^3}p_3(M)$	$c_{Y^2}p_2(U)$	$c_{Y^3}p_3(U)$	$c_{Y^2}\Delta p_2$	$c_{Y^3}\Delta p_3$
1.000	1.210	.971	-2.068	1.029	-1.576	.301	-.491	.727
2.000	3.130	1.342	-2.551	.966	-2.180	.416	-.370	.549
3.000	6.560	1.728	-3.076	.967	-2.806	.536	-.269	.431
4.000	12.000	2.123	-3.588	.913	-3.448	.659	-.140	.253
5.000	19.770	2.517	-4.128	.855	-4.088	.781	-.040	.074
U: 5.570	25.300	2.738	-4.446	.850	-4.446	.850	0.000	0.000
6.000	30.050	2.903	-4.675	.871	-4.715	.901	.040	-.030
7.000	43.060	3.282	-5.219	.886	-5.331	1.019	.111	-.132
8.000	59.100	3.657	-5.741	.914	-5.938	1.135	.197	-.221
9.000	78.660	4.031	-6.249	.927	-6.547	1.251	.297	-.324

(4.3; Tabelle 3)

Masstabsfaktoren c_Y und Koordinaten des Mittelpunktes der Chroma-2-Farben im Vergleich zu den Koordinaten des Umfeldes U (experimentell).
 ————— Umfeld

Wir finden:

- 1) Der Farbort des für die MUNSELL-Stufungen benutzten grauen Umfeldes U liegt auf der Verschiebungsgeraden der Mittelpunkte M chromagleicher Farben.
- 2) Der Farbort des Umfeldes U fällt für die Helligkeit des Umfeldes (Value 5,6) mit dem Mittelpunkt M zusammen.

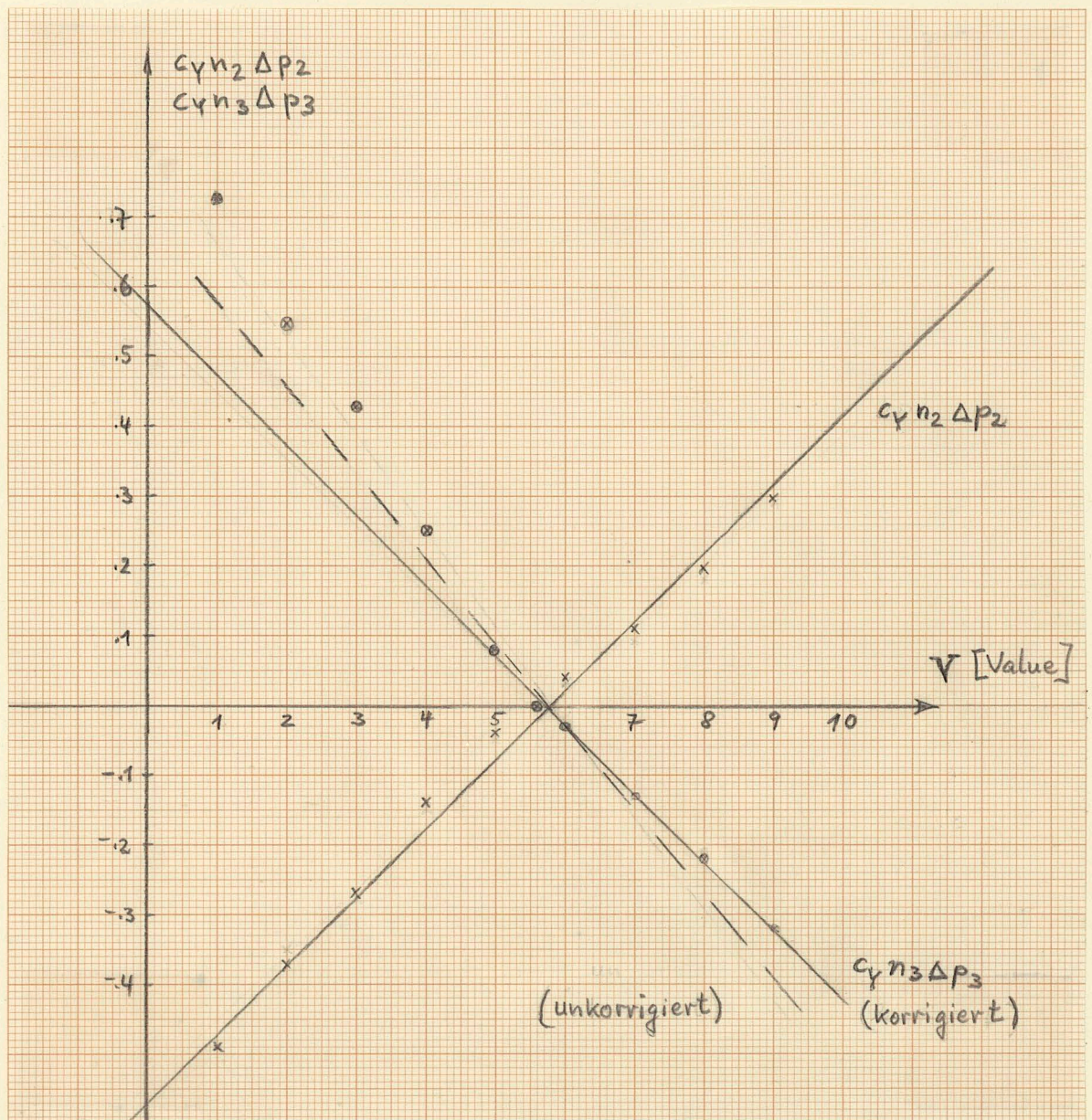
Beide Ergebnisse wurden nach der Theorie erwartet (Abschnitt 4.1, Punkt 5).

Wir wollen weiter prüfen, ob die theoretische Voraussage erfüllt ist, dass sich der Abstand von U und M linear in den Koordinaten $c_{Y^i}p_i$ ($i=2,3$) ändern. Dazu stellen wir die aus der Tabelle 3

abzulesenden Differenzen $c_{Yn2}\Delta p_2$ und $c_{Yn3}\Delta p_3$ als Funktion von $(V-V_u)$ dar. (V_u = Value des Umfeldes). Es gilt

$$c_{Yni}\Delta p_i = c_{Yni}p_i(\text{III}) - c_{Yni}p_i(\text{II}) \quad (4.3;15)$$

$$(i=2,3)$$



(4.1; Abb.5)

Verschiebung des Mittelpunktes M
chromagleicher Farben gegenüber dem
Farbort des Umfeldes U

Man erhält als grobes Mittel

$$c_Y n_2 \Delta p_2 = K_2 (V - V_u) \quad (4.3; 16-17)$$

$$c_Y n_3 \Delta p_3 = K_3 (V - V_u)$$

$$V_u = 5.6 \quad K_2 = \frac{1}{10} \quad K_3 = -\frac{1}{10} \quad (4.3; 18-20)$$

Mit diesen Gleichungen lassen sich die der Tabelle 3
(experimentelle Mittelpunktskoordinaten) entsprechenden theore-
tischen Daten berechnen.

	V	Y	c_Y	$p_2(\text{m})$	$p_3(\text{m})$	$p_2(\mu)$	$p_3(\mu)$	Δp_2	Δp_3
	1.000	1.210	.971	-2.094	.278	-1.623	.110	-.470	.168
	2.000	3.130	1.342	-1.889	.205	-1.623	.110	-.265	.094
	3.000	6.560	1.728	-1.772	.164	-1.623	.110	-.148	.053
	4.000	12.000	2.123	-1.697	.137	-1.623	.110	-.073	.026
	5.000	19.770	2.517	-1.646	.118	-1.623	.110	-.022	.008
u:	5.570	25.300	2.738	-1.623	.110	-1.623	.110	0.000	0.000
	6.000	30.050	2.903	-1.609	.105	-1.623	.110	.014	-.005
	7.000	43.060	3.282	-1.580	.095	-1.623	.110	.043	-.015
	8.000	59.100	3.657	-1.557	.087	-1.623	.110	.066	-.023
	9.000	78.660	4.031	-1.538	.080	-1.623	.110	.085	-.030

	V	Y	c_Y	$c_Y n_2 p_2(\text{m})$	$c_Y n_3 p_3(\text{m})$	$c_Y n_2 p_2(\mu)$	$c_Y n_3 p_3(\mu)$	$c_Y n_2 \Delta p_2$	$c_Y n_3 \Delta p_3$
	1.000	1.210	.971	-2.033	.758	-1.576	.301	-.457	.457
	2.000	3.130	1.342	-2.537	.773	-2.180	.416	-.357	.357
	3.000	6.560	1.728	-3.063	.793	-2.806	.536	-.257	.257
	4.000	12.000	2.123	-3.605	.816	-3.448	.659	-.157	.157
	5.000	19.770	2.517	-4.145	.838	-4.088	.781	-.057	.057
u:	5.570	25.300	2.738	-4.446	.850	-4.446	.850	0.000	0.000
	6.000	30.050	2.903	-4.672	.858	-4.715	.901	.043	-.043
	7.000	43.060	3.282	-5.188	.876	-5.331	1.019	.143	-.143
	8.000	59.100	3.657	-5.695	.892	-5.938	1.135	.243	-.243
	9.000	78.660	4.031	-6.204	.908	-6.547	1.251	.343	-.343

(4.3; Tabelle 4)

Koordinaten des Mittelpunktes der Chroma-
2-Farben (berechnet aus 4.3; 15 und
4.3; 16-17) im Vergleich zu den Koordinaten
des Umfeldes (theoretisch)

Umfeld

Die noch bestehenden Abweichungen der Mittelpunkte der Chroma-2-Farben von Experiment und Theorie (vergleiche Tabelle 3 und 4) können wahrscheinlich auf die unterschiedlichen Farborte $p_2(N_i)$, $p_3(N_i)$ ($i=1,2,\dots,9$) der im Experiment benutzten Graustufen zurückgeführt werden. Diese Abweichungen sekundärer Art sind schwer zu überblicken, da Umfeld und Graustufe N_i ($i=1,2,\dots,9$) gemeinsam die Lage der Mittelpunkte M mitbestimmen. Sie werden daher nicht diskutiert.

Als drittes wesentliches Ergebnis können wir daher hervorheben.

3) Der Farbort des Umfeldes verschiebt sich im Mittelpunktskoordinatensystem $c_Y n_i p_i(F,M)$ linear in V (Value-Funktion).

Es gilt

$$c_Y n_2 p_2(M) = c_Y n_2 p_2(U) + K_2(V - V_n) \quad (4.3; 21-22)$$

$$c_Y n_3 p_3(M) = c_Y n_3 p_3(U) + K_3(V - V_n)$$

mit

$$K_2 = -K_3 = 1/10 \quad V_n = 5.6 \quad (4.3; 23-25)$$

Alle Ergebnisse dieses Abschnittes wurden von der Theorie erwartet.

Die Konstanten $K_2 = -K_3 = 1/10$ beschreiben, welche Differenzen zwischen den Koordinaten des nach physikalischer Definition "unbunten" Infeldes vom Farbort U und dem "empfindungsgemäss unbunten" Infeld vom Farbort M als Funktion der Infeldhelligkeit bestehen.

Die mathematische Formulierung der Verschiebung des Umfeldfarbortes im Mittelpunktskoordinatensystem (Gleichung 4.3; 21-25) war notwendig, weil der Farbort des Umfeldes U im Mittelpunktskoordinatensystem im Zusammenhang mit der Buntkraftstufung (Chroma-Stufung im MUNSELL-System) und wahrscheinlich im Zusammenhang mit der Bunttonverschiebung als Funktion der Helligkeit (BEZOLD-BRUECKE-Effekt) steht. Wir werden die hier abgeleiteten Gleichungen noch in Kap. 4.6 benötigen.

4.4 Beschreibung der Grau-Leuchtend-Grenze (EVANS-1967-Experimente)

Die zu beschreibenden Experimente von EVANS und SWENHOLT^{1),2)} sind durch folgende Beobachtungen zu beschreiben.

Wenn man die Helligkeit Y einer Infeldfarbe von Schwarz (Helligkeit $Y = 0$) aus erhöht, so wird bei einer bestimmten Helligkeit Y_S gerade der Buntton sichtbar. Erhöht man die Helligkeit weiter, so wird die Infeldfarbe bis zu einer zweiten Helligkeitsgrenze Y_{Go} als vergraut empfunden. Alle Farben an der G_o -Grenze werden als weder vergraut, noch leuchtend empfunden (non gray, non fluent).

Nach EVANS und SWENHOLT sind die Helligkeiten

Y_S (Helligkeit an der Bunttonschwelle)

Y_{Go} (Helligkeit an der Grau-Leuchtend-Grenze)

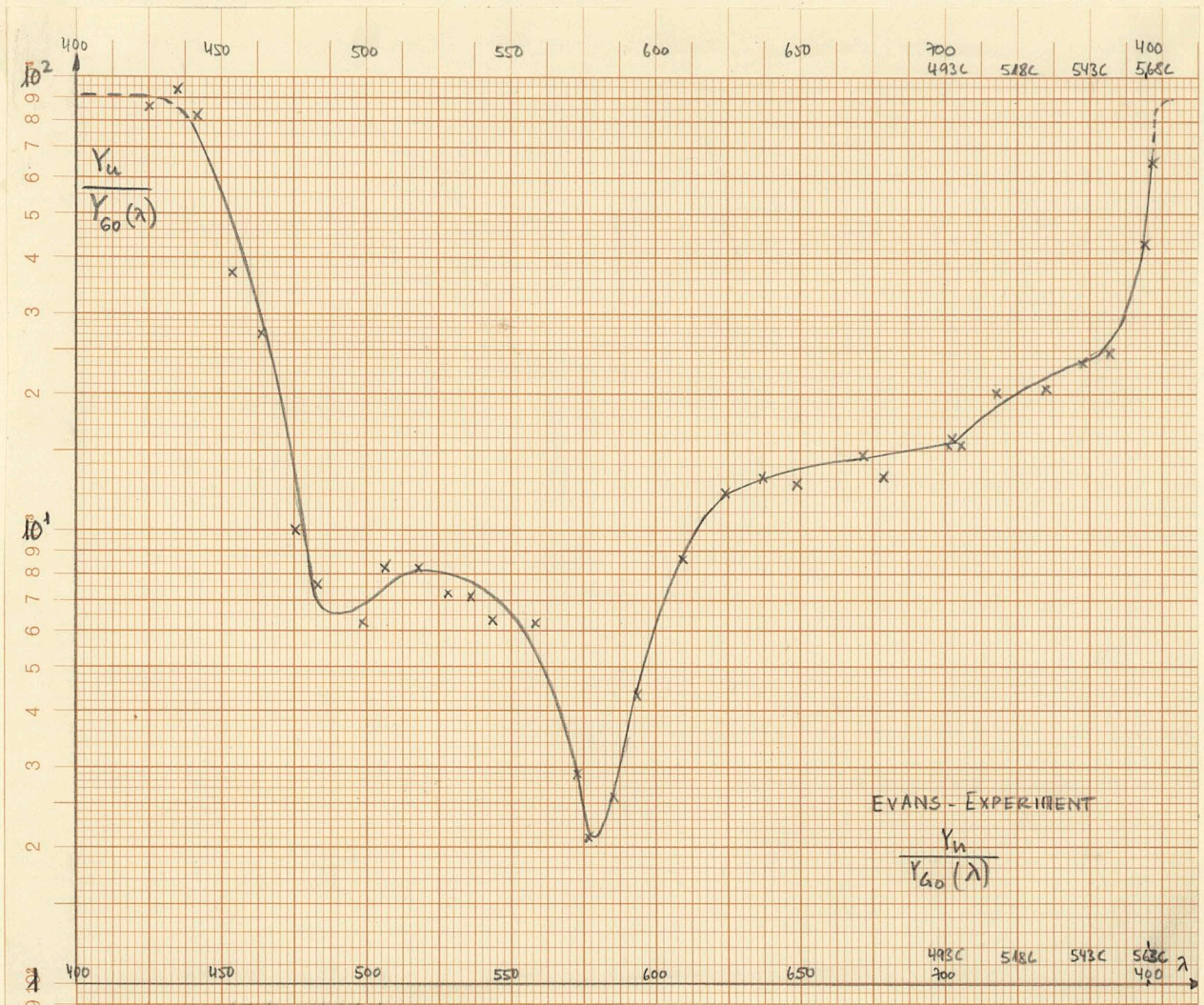
Funktionen der Wellenlänge. Bei weissem Umfeld ($x = .303$, $y = .326$) mit einer Umfeldhelligkeit von ca. 1000 Lux, gilt innerhalb der experimentellen Fehlergrenzen für alle Wellenlängen

$$Y_S = \frac{1}{10} Y_{Go} \quad (4.4;1)$$

Die experimentell gemessene Helligkeit Y_{Go} als Funktion der Wellenlänge zeigt Abb.1.

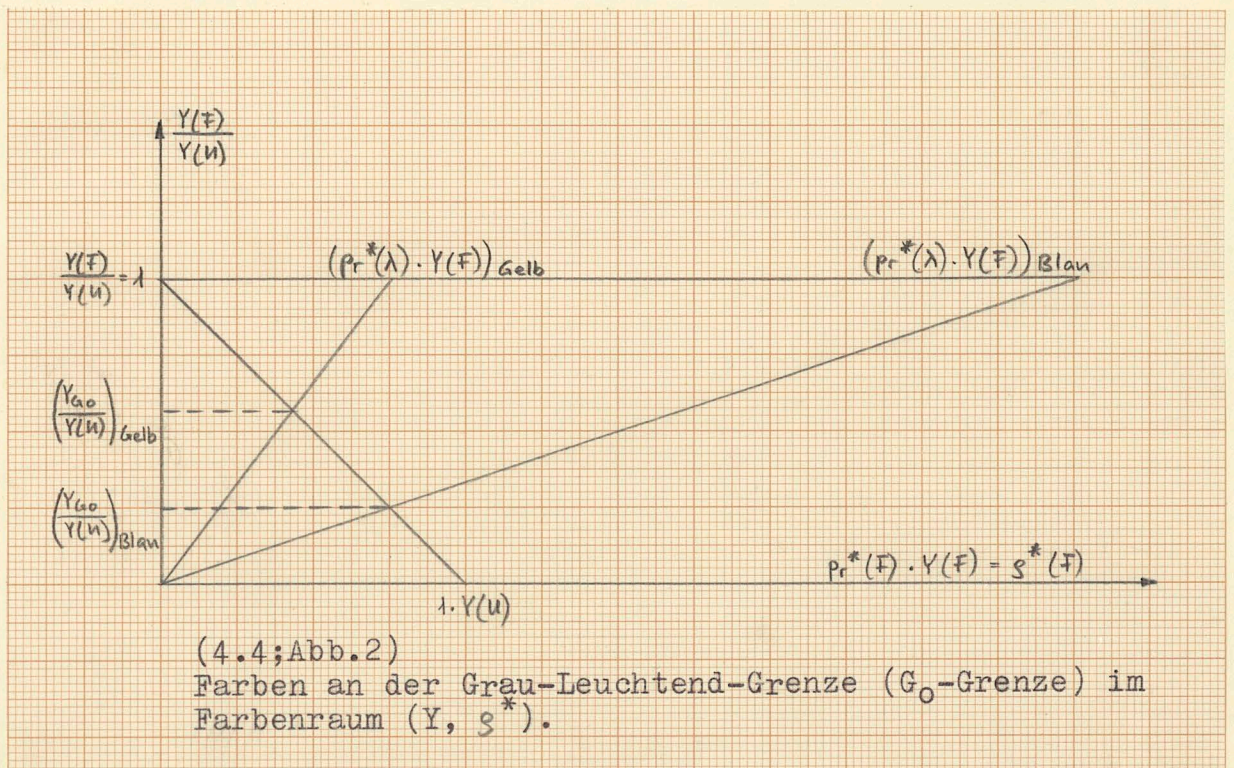
Wir versuchen, die von EVANS gemessene Empfindungsgrösse durch einfache Funktionen von $p_2^*(\lambda)$ und $p_3^*(\lambda)$ zu beschreiben. Dazu betrachten wir den Farbenraum in den Koordinaten Y (Helligkeit) und $p_r^* Y = g^*$ (Buntmoment = lineares Buntsignal).

- 1) R.M. Evans and K. Swenholt, Chromatic Strength of Colors: Dominant Wavelength and Purity, JOSA 57, 1319-1324 (1967).
- 2) R.M. Evans and K. Swenholt, Chromatic Strength of Colors: Part II, The Munsell-System, JOSA 58, 580-584 (1968).



(4.4; Abb. 1)

G_0 -Grenze der EVANS-Experimente für nahezu spektral gesättigte Infeldfarben.



Für unbunte Infeldfarben stimmt die Helligkeit an der G_0 -Grenze mit der Umfeldhelligkeit überein. Für alle anderen Farben mit $p_r^*(F) > 0$ ist $Y_{G_0} < Y_u$. Wir versuchen daher den einfachen Ansatz

$$Y_{G_0} = \frac{Y_u}{1 + p_r^*(F)} \quad (4.4;2)$$

Wegen $p_r^*(F) = \delta^*(F) p_r^*(\lambda)$ (4.4;3)

folgt

$$Y_{G_0} \cdot p_r^*(\lambda) \cdot \delta^*(F) = Y_u - Y_{G_0} \quad (4.4;4)$$

Für Spektralfarben $\delta^*(F) = 1$ gilt

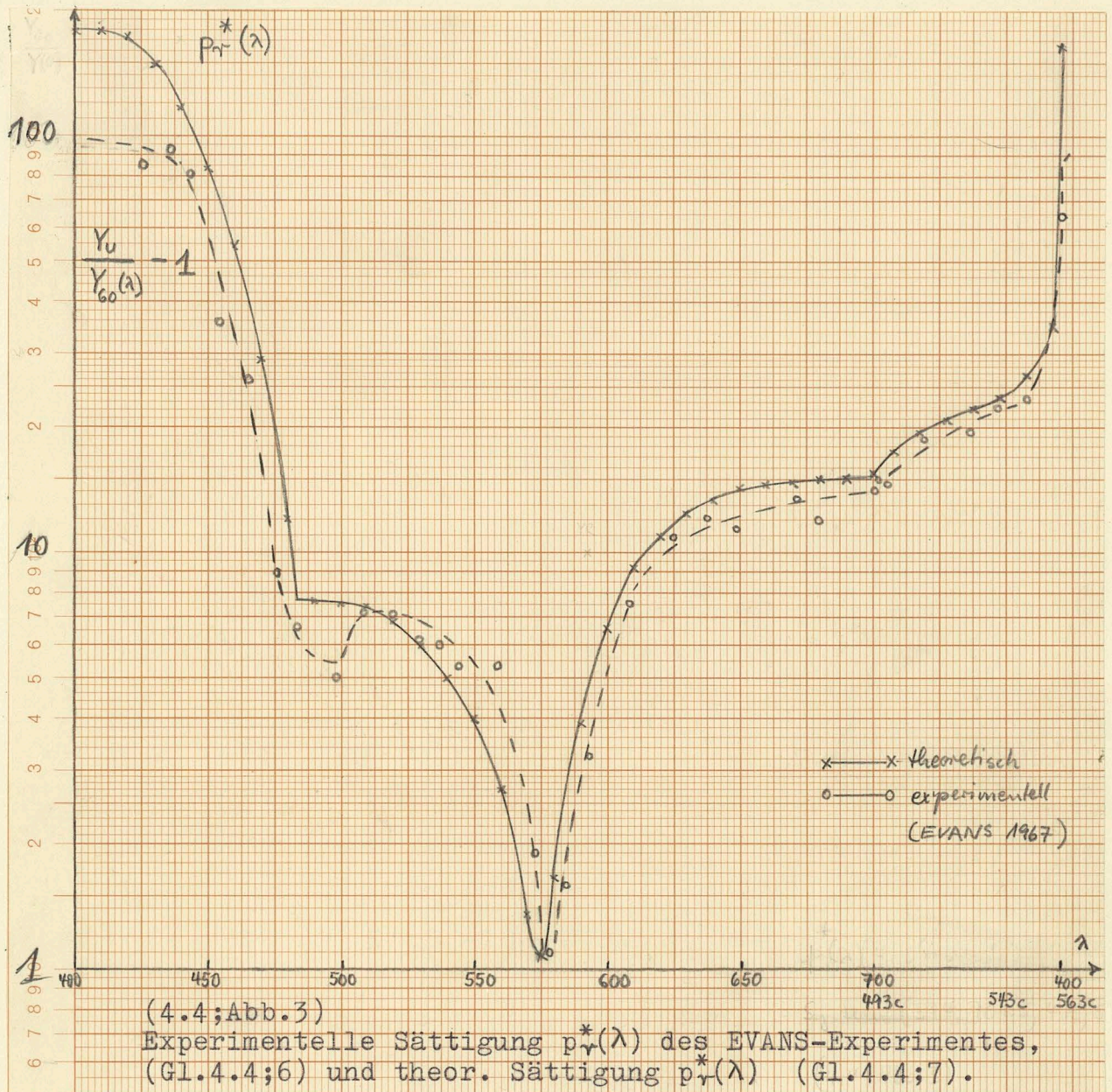
$$Y_{G_0} = Y_u - Y_{G_0} \cdot p_r^*(\lambda) \quad (4.4;5)$$

Alle spektralen G_0 -Farben liegen auf der Geraden, die die Punkte $(Y_u, 0)$ mit $(0, 1 \cdot Y_u)$ verbindet (siehe Abb.2).

Durch Auflösen von (4.4;5) nach $p_r^*(\lambda)$ ergibt sich für Spektralfarben

$$p_r^*(\lambda) = \frac{Y_u}{Y_{G_0}} - 1 \quad (4.4;6)$$

Mit den freundlicherweise von EVANS und SWENHOLT zur Verfügung gestellten Werten Y_u/Y_{G_0} wurde $p_r^*(\lambda)$ berechnet und in Abb.3 dargestellt.



Andererseits wurde die zur Chroma-Stufung abgeleitete Sättigung

$$p_r^*(\lambda) = \sqrt{n_2^2 p_2^{*2}(\lambda) + n_3^2 p_3^{*2}(\lambda)} \quad (4.4; 7)$$

berechnet. Die annähernde Übereinstimmung beider Funktionen liefert damit einen Zusammenhang zwischen Chroma-Stufung und Helligkeit Y_{Go} , wie er von EVANS und SWENHOLT vermutet wurde. Der von diesen ermittelte erste Zusammenhang^{1), 2)} war noch sehr unbefriedigend. Er wird durch die Gleichung (4.4; 6) und (4.4; 7) wesentlich besser beschrieben. Die noch bestehenden Unterschiede können folgende Ursachen haben:

- a) Die Sättigung $p_r^*(\lambda)_{\text{theor.}}$ gilt für Lichtart C, während die Sättigung $p_r^*(\lambda)_{\text{experimentell}}$ für das EVANS-Umfeld gemessen wurde.
- b) Die im Experiment verwendeten Spektralfarben im grünen und blauen Bereich waren nicht spektral gesättigt.
- c) Die experimentellen Ergebnisse beschreiben nur einen Beobachter.

Die Empfindungsstufung der Helligkeit beim Auge im Vergleich zur Stufung der Lautheit beim Ohr

ZWICKER und FELDKELLER¹⁾ haben für das Ohr die Lautheit (Empfindungsgrösse) als Funktion der Erregung (Reizgrösse) abgeleitet. Sie gehen davon aus, dass die Erregung E und die Lautheit N dem WEBER-FECHNERSCHEN Gesetz genügen. Daher sollte gelten

$$\frac{\Delta N}{N} = n \frac{\Delta E}{E} \quad (4.5;1)$$

Diese Beziehung verliert ihre Gültigkeit in der Nähe der Hörschwelle. Dann gilt

$$\frac{\Delta N}{N + N_{GR}} = n \frac{\Delta E}{E + E_{GR}} \quad (4.5;2)$$

wobei E_{GR} die Grunderregung an der Hörschwelle sein soll. Diese Grunderregung denken sie sich durch Fluktuationen der Basismembran, spontane Muskelbewegungen und ähnliches hervorgerufen. Ihr entspricht die aus Gewöhnung nicht wahrgenommene Lautheit N_{GR} . Integration der Gleichung (4.5;2) führt auf ein Potenzgesetz

$$N + N_{GR} = C (E + E_{GR})^n \quad (4.5;3)$$

Aus der Forderung $E = 0$ für $N = 0$ erhalten sie

$$N = N_{GR} \left[\left(1 + \frac{E}{E_{GR}} \right)^n - 1 \right] \quad (4.5;4)$$

Experimente legen es nahe, dass die Erregung E_{HS} an der Hörschwelle um einen Schwellenfaktor s kleiner ist als die Grunderregung E_{GR} . Dann folgt

$$N = N_{GR} \left[\left(1 + s \frac{E}{E_{HS}} \right)^n - 1 \right] \quad (4.5;5a)$$

1) Zwicker E. und Feldkeller, R; Das Ohr als Nachrichtenempfänger, Hirzel-Verlag, Stuttgart 1967, 232S., insbesondere S.133-139.

Der Schwellenfaktor s liegt in der Grössenordnung von .5. Für tiefe Frequenzen wird $s = .65$, für hohe $s = .25$ angegeben.

Für sehr kleine Werte von E muss die Lautheit bei der Hörschwelle asymptotisch gegen den Wert $N = 0$ gehen. Das wird durch eine geringfügige Abänderung ($1 - s$ statt 1) in Gleichung (4.5;5a) erreicht. Dann folgt

$$N = N_{GR} \left[\left(1 - s + s \frac{E}{E_{HS}} \right)^n - 1 \right] \quad (4.5;5b)$$

Wir versuchen diese Gleichungen für die Stufung der Helligkeit (Value-Funktion) anzuwenden. Dann tritt an die Stelle der Lautheit N die Empfindungshelligkeit V , an die Stelle der Erregung E die Helligkeit Y .

Für alle Helligkeiten gilt

$$V = V_{GR} \left[\left(1 + s \frac{Y}{Y_S} \right)^n - 1 \right] \quad (4.5;6a)$$

oder

$$V = V_{GR} \left[\left(1 - s + s \frac{Y}{Y_S} \right)^n - 1 \right] \quad (4.5;6b)$$

Für kleine Helligkeiten ($Y \rightarrow Y_S$) gilt

$$V = V_{GR} \frac{2n}{1-n} \frac{1}{1 + \frac{2}{1-n} \frac{Y_S}{s} \frac{1}{Y}} \quad (4.5;7a)$$

oder

$$V = V_{GR} \frac{2n}{1-n} \frac{1}{1 + \frac{2}{1-n} \frac{Y_S}{s} \frac{1}{Y - Y_S}} \quad (4.5;7b)$$

Für grosse Helligkeiten ($Y \gg Y_S$) gilt

$$V = V_{GR} \left(\frac{s}{Y_S} \right)^n Y^n \quad (4.5;8a \text{ und } b)$$

Wir zeigen, dass sich die Formeln für kleine und grosse Helligkeiten durch Entwickeln von (4.5;6a und 6b) ergeben.

a) Kleine Helligkeiten: Wir setzen $n = p/q$ und $x = s Y_S/Y$. Dann können wir (4.5;6a) für $Y_S < Y < Y_S/s$ ($s < 1$; Analogie zur Theorie für die Lautheit) entwickeln und erhalten

$$V = V_{GR} \left[\left(1 + \frac{p}{q} x - \frac{p(q-p)}{2q^2} x^2 + \dots - 1 \right) \right] \quad (4.5;9a)$$

$$= V_{GR} \frac{\frac{p}{q} x}{1 + \frac{q-p}{2q} x} \quad (4.5;10a)$$

$$= V_{GR} \frac{2p}{q-p} \frac{1}{1 + \frac{2q}{q-p} \frac{1}{x}} \quad (4.5;11a)$$

oder in Uebereinstimmung mit (4.5;7a):

$$V = V_{GR} \frac{2n}{1-n} \frac{1}{1 + \frac{2}{1-n} \frac{Y_s}{s} Y} \quad (4.5;12a)$$

Entsprechend ergibt sich für $x = s(Y - Y_s)/Y_s$ im Intervall $Y_s < Y < \frac{Y_s}{s} + Y_s$ Gleichung (4.5;7b).

Die Gleichungen a liefern $V = 0$ für $Y = 0$, während die Gleichungen b den physikalisch sinnvolleren Ansatz $V = 0$ für $Y = Y_s$ erfüllen. Da die Schwelle Y_s und die Stufung in der Nähe der Schwelle für die MUNSELL-Value-Stufung unbekannt sind (erhebliche messtechnische Schwierigkeiten), so könnten zur Beschreibung der bisherigen Experimente auch die Gleichungen a verwendet werden. Wir wollen hiervon absehen.

b) Grosse Helligkeiten: Die Gleichungen (4.5;6a und 6b) gehen für $Y \gg Y_s$, das heisst für grosse Helligkeiten Y oder kleine Schwellenhelligkeit Y_s (z.B. Dunkeladaptation) über in (4.5;8a und 8b). Dies lässt sich unmittelbar ablesen.

c) Exponent n: Beim Gehör ergibt sich nach ZWICKER und FELDCELLER¹⁾ stets der Exponent $n = .23$. Beim Sehen wurde für grosse Helligkeiten oder für Dunkeladaptation in zahlreichen Arbeiten von STEVENS²⁾ und Mitarbeitern immer wieder der Exponent $n = .33$ gefunden. Für diesen Exponenten haben wir die MUNSELL-Value-Funktion mit den Remissionswerten des Value Polynoms durch Ausgleichsrechnung angenähert. Zur Annäherung benutzten wir Gleichung (4.5;6b). Tabelle 1 enthält alle wesentlichen Daten und Parameter.

2) Stevens, J.C. and Stevens, S.S.; Brightness Function: Effects of Adaptation, J. Opt. Soc. Am. 53, 375-385 (1963).

Remission			Value für Remission des V-Polynoms			
exp ³⁾	exp ⁴⁾ korrigiert	Value Polynom	Value Polynom	n = .30	n = .1/3	n = .36
1.12	1.22	1.21	1.00	1.05	1.03	1.01
2.90	3.14	3.126	2.00	1.93	1.96	1.99
5.95	6.45	6.555	3.00	2.93	2.96	2.98
11.05	12.0	12.00	4.00	3.98	3.99	4.00
18.0	19.6	19.77	5.00	5.03	5.02	5.01
27.3	29.6	30.05	6.00	6.05	6.03	6.02
38.9	42.2	43.06	7.00	7.04	7.03	7.01
53.6	58.2	59.10	8.00	8.01	8.00	7.99
72.8	79.0	78.66	9.00	8.98	8.98	8.98
100.0	102.56	102.56	10.00	9.94	9.97	9.99
Schwellenfaktor s				-.1086	.4250	2.0423
Helligkeit an Schwelle Y_s				-.0756	.1551	.3501
asymptotische Konstante V_1				3.1875	2.5125	2.0992

(4.5;Tabelle 1)

Annäherungen der Value-Funktion nach (4.5;6b)

Die Vorzugsstellung des Exponenten $n = 1/3$ hat sich in dieser Arbeit in anderem Zusammenhang bei der Untersuchung der Chroma-2-Farben ergeben. Wir fanden, dass innerhalb der experimentellen Fehlergrenzen der gleiche Exponent n in Gleichung (4.3;13) auftrat. Es gilt

$$c_Y = .91 Y^n \quad \text{mit} \quad n = .341 \quad (4.5;13)$$

Wir vergleichen diese Funktion mit der Entwicklung (4.5;8) für grosse Helligkeiten ($Y \gg Y_s$)

$$V = V_{GR} \left(\frac{s}{Y_s} \right)^n Y^n \quad (4.5;8)$$

Wir setzen und erhalten nach Tabelle 1

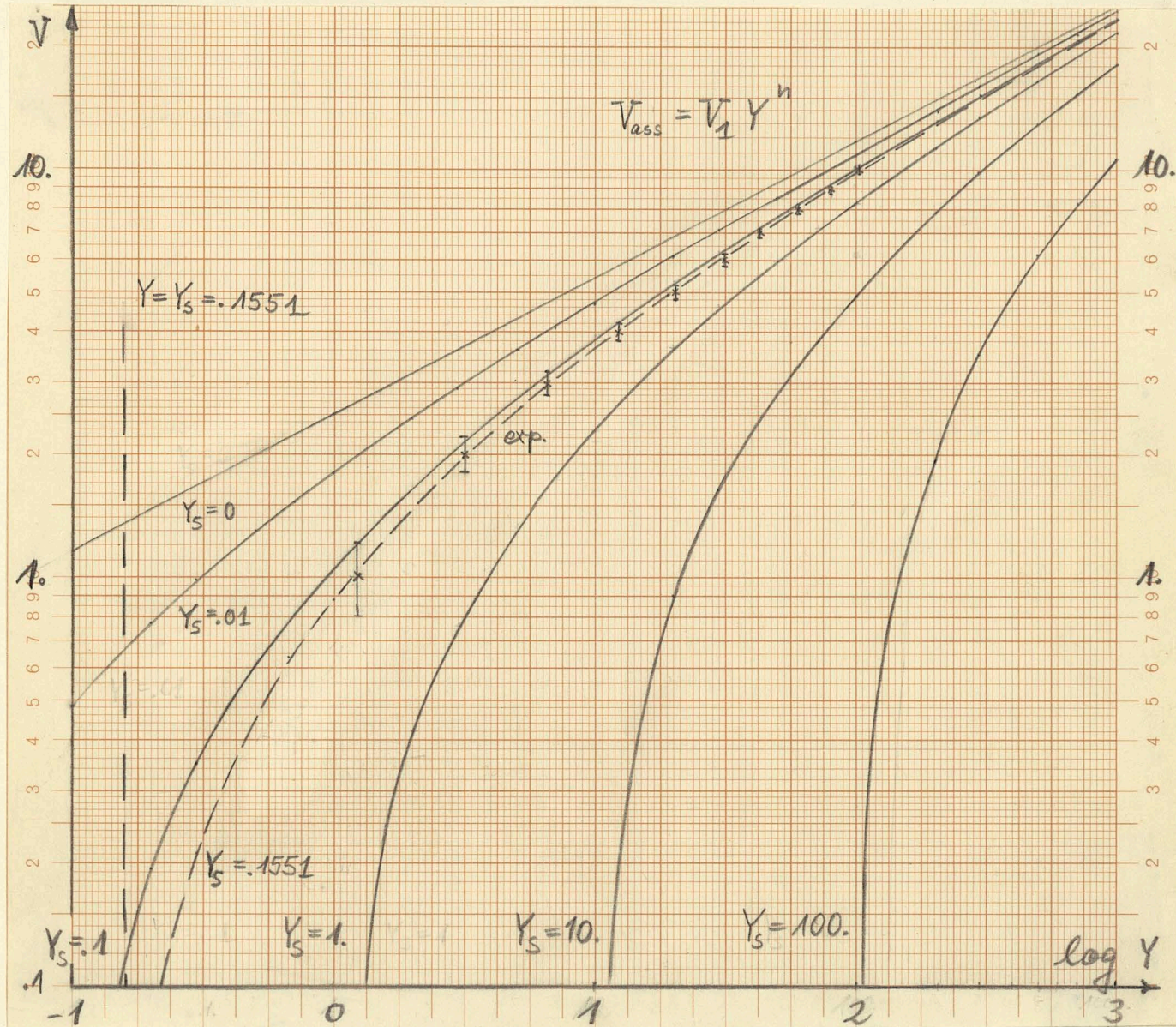
$$V_1 = V_{GR} \left(\frac{s}{Y_s} \right)^n = 2.5125 \quad (4.5;14)$$

Die bilogarithmische Darstellung von V über Y muss eine Gerade mit der Steigung $n = 1/3$ sein, die den Punkt ($V = 2.5125$, $Y = 1$) enthält. Diese Gerade bildet die Asymptote für alle Value-Stufungsfunktionen beliebiger Parameter s und Y_s (siehe auch Abb.1). Diese asymptotische Value-Funktion steht mit der für die Chroma-Stufung so wichtigen Funktion c_Y in einfachem Zusammenhang. Wir erhalten

durch Vergleich von (4.5;8, 13 und 14)

$$c_Y = .36 V_1 Y^n \quad (4.5;15)$$

Für kleine Y haben alle Kurven von Gleichung (4.5;6b) als weitere Asymptote die Gerade $Y = Y_s$. Wir veranschaulichen uns die Kurvenscharen mit Y_s als Parameter in Abb. 1.



(4.5;Abb.1)

Value als Funktion von Y für $n = 1/3$ (Gleichung 4.5;6b)

— x — x — x experimentell mit Streubreite und für $Y_s = .1551$
 ————— theoretisch, Parameter Y_s , $V_1 = 2.5125$, $s = .4250$

Die experimentellen Value-Daten³⁾, korrigiert mit dem Messfehler 6%⁴⁾ und normiert auf $Y = 102.56$ für Value 10 sind in Abb.1 zum Vergleich dargestellt. Die mittlere Streuung der experimentellen Daten wird mit ± 0.21 Value-Einheiten angegeben⁵⁾. Alle Annäherungen der Tab. 1 an die Value-Funktion haben eine wesentlich kleinere Streubreite.

Die durch Ausgleichsrechnung ermittelte Funktion für $n = 1/3$ der Form (4.5;6b) beschreibt die Experimente gut und liefert uns gleichzeitig die Schwelle Y_s . An der Schwelle wird $V = 0$.

Die Schwelle Y_s ist umfeldabhängig. Für weisses Umfeld verschiebt sie sich zu grösserem Y_s und für nahezu schwarzes Umfeld zu kleinerem Y_s . Die Stufung wird dann durch eine der nach rechts oder links verschobenen Kurven der Abb. 1 beschrieben. Wahrscheinlich beschreibt der Schwellenfaktor s die geometrischen Grössenverhältnisse von In- und Umfeld. Stufungen unter konstanten geometrischen Bedingungen mit Variation des Umfeldes (schwarz: Value 1; grau: Value 5; weiss: Value 9) wurden von KANEKO⁶⁾ durchgeführt. KANEKO hat die Experimente von MUNSELL, SLOAN und GODLOVE³⁾ bei grauem Umfeld wiederholt und stets eine S-förmige Stufungsfunktion bekommen, wenn V über $\log Y$ dargestellt wird⁷⁾. Er kann sich nicht erklären, warum diese S-Form nicht gefunden wurde. Die Value-Funktion ist also wahrscheinlich fehlerhaft und wir können die Ergebnisse von KANEKO und die Aenderungen bei neuem Umfeld nur mit geänderten Parametern auch für die Ausgangsfunktion beschreiben. Die aus der Zeichnung entnommenen Daten scheinen zu ungenau für die Bestimmung der Parameter und ihrer Aenderungen.

Aenderungen der Stufungsfunktionen unter neuen Adaptationsbedingungen sind von grosser Bedeutung. Daher wollen wir ein Verfahren zur Berechnung der neuen Parameter noch kurz beschreiben.

- 3) Munsell, A.E.O., Sloan, L.L. and Godlove, I.H.; Neutral Value Scales. I. Munsell Neutral Value Scale, J. Opt. Soc. Am. 33 (1933), 394-411, Table VIII.
- 4) Newhall, S.M., Nickerson, D. and Judd, D.B.; Final Report of the O.S.A. Subcommittee on the Spacing of the Munsell Colors. J. Opt. Soc. Am. 33 (1943), 385-418, insbesondere S.417.
- 5) Zitat 3), Table X, JND-method.
- 6) Kaneko, T.; A Reconsideration of the Cobb-Judd-Lightness Function, Acta Chromatica 1 (1964), 103-110.
- 7) Zitat 6), Fig. 6 und Text Seite 107.

Ist die Stufungsfunktion für ein Umfeld bekannt, so lässt sich die Stufungsfunktion für ein neues Umfeld durch eine, zwei oder drei Messungen festlegen je nachdem, ob man eine Variation von z.B. Y_s allein, s und Y_s oder s , Y_s und V_1 zulässt. Darf allein Y_s variieren, so bestimme man wie KANEKO⁷⁾ für eine beliebige Farbe bei grauem Umfeld die gleichhell empfundene bei weissem Umfeld.

Aus der Differenz der Y -Werte bei grauem und weissem Umfeld lässt sich die Stufungsfunktion für weisses Umfeld berechnen. Betrachten wir die Kurven in Abb. 1, so ergibt sich jede neue Stufungsfunktion durch Verschiebung entlang der Asymptote. Die verschobene Kurve ist durch die Bedingung gleicher Value-Wert, neuer Y -Wert eindeutig festgelegt. Entsprechend lassen sich für zwei (oder drei) Messpunkte die neuen Parameter Y_s bzw. s (oder Y_s , s , V_1) bestimmen. Welchen Einfluss geänderte Adaptations- und Umfeldbedingungen sowie geänderte Grössenverhältnisse von In- und Umfeld auf die einzelnen Konstanten haben, muss experimentell abgeklärt werden.

Versucht man zur Annäherung der Value Funktion $n = .30$ oder $n = .36$ zu benutzen, so erhält man negative Schwellen Y_s oder Schwellenfaktoren $s > 1$ wie aus Tabelle 1 hervorgeht. Das ist physikalisch nicht sinnvoll, und deshalb verwenden wir wie experimentell von STEVENS²⁾ belegt, den Exponenten $n = .33$, obwohl die Fehlerquadratsumme für $n = .36$ kleiner ist als für $n = .33$.

Zum Schluss soll noch einmal auf die für das folgende wesentliche hyperbolische Entwicklung (4.5;7a und b) eingegangen werden.

Wir wollen annehmen, dass Value als Funktion von Y nach (4.5;6b) beschrieben wird. Nach (4.5;7b) gilt an der Schwelle eine lineare Gleichung

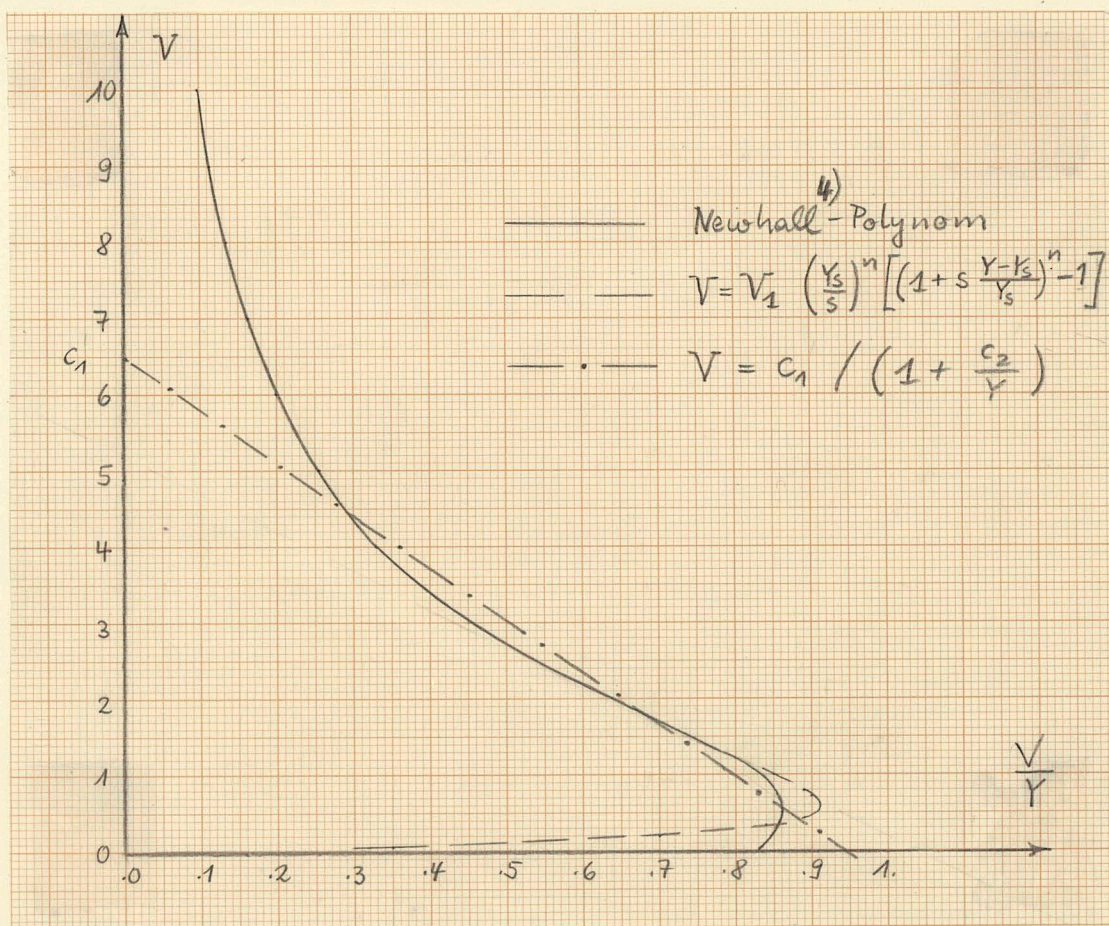
$$V = c_1 \frac{1}{1 + c_2 \frac{1}{Y - Y_s}} \quad (c_1, c_2 = \text{const.}) \quad (4.5;16)$$

oder

$$V = c_1 - c_2 \frac{V}{Y - Y_s} \quad (4.5;17)$$

V dargestellt über $V/(Y - Y_s)$ ist an der Schwelle eine Gerade. Ist die Schwelle unbekannt, so müssen wir V über V/Y darstellen.

In Abb. 2 wurde diese Darstellung gewählt. An der Schwelle erhalten wir keine Gerade mehr.



(4.5;Abb.2)

Annäherung der Value Funktion durch eine Gerade der hyperbolischen Form $V = c_1 - c_2 V/Y$

- Value Polynom von NEWHALL⁴⁾
- - - Value Funktion nach (4.5;6b) für $n = 1/3$.

Sind die Helligkeiten Y nicht zu gross (etwa $0 < Y < 30$; entspricht $V = 6$), so lässt sich die Value Funktion (4.5;6b) durch eine Gerade annähern.

Die Beschreibung der Helligkeitsstufung durch eine hyperbolische Gleichung (Gerade in Abb.2)

$$V = \frac{c_1}{1 + c_2/Y} \quad (4.5;18)$$

wurde schon von ADAMS und COBB (1922)⁸⁾ sowie JUDD (1940)⁸⁾ benutzt. Auch elektrophysiologische Messungen von NAKA und RUSHTON⁹⁾ zeigen, dass sich die durch den Reiz ausgelösten S-Potentiale in der Netzhaut von Fischen durch Gleichung (4.5;18) beschreiben lassen.

Entsprechend versuchen wir die Chroma Funktion C durch die meist nicht sehr gross werdende Sättigung p in einer hyperbolischen Gleichung

$$C = \frac{c_1(Y)}{1 + c_2(\lambda)/p} \quad (4.5;19)$$

zu beschreiben. Wir hoffen, dass sich bei Kenntnis der bisher unbekannten Buntschwelle $p_s(\lambda)$ ¹⁰⁾ der Uebergang für alle λ auf die Potenzform

$$C = c_1(Y) \left(\frac{p_s(\lambda)}{s} \right)^n \left[\left(1 + s \frac{p - p_s(\lambda)}{p_s(\lambda)} \right)^n - 1 \right] \quad (4.5;20)$$

durchführen lässt.

- 8) Judd, D.B. and Wyszecki, G., Color in Business, Science and Industry, 2nd. Ed. 1963, S.266.
- 9) Naka, K.I. and Rushton, W.A.H., S-Potentials from colour units in the retina of fish, J. Physiology 185, 545 (1966).
- 10) Nach Evans und Swenholt (siehe Kap. 4.4) ist an der Bunttonschwelle $Y_s = .1 Y_{Go}$ und daher gilt für die Buntschwelle mit Gleichung (4.4;6)

$$p_s(\lambda) = \frac{Y_s p_r(\lambda)}{Y_n} = \frac{1}{10} \left(1 - \frac{Y_{Go}}{Y_n} \right)$$

4.6 Beschreibung der Chroma-Stufung (MUNSELL-System)

Eine befriedigende Beschreibung der Buntkraft von Farben (Chroma-Stufung im MUNSELL-System) zählt zu den schwierigsten ungelösten Aufgaben des Farbensehens.

Da die Koordinaten X_i ($i = 1, 2, 3$) mit Erfolg bunttongleiche Farben beschreiben konnten, so wollen wir versuchen, auch die Buntkraft durch einfache Funktionen dieser Koordinaten darzustellen.

Als Ausgangspunkt dienen die in Kapitel 4.3 gewonnenen Ergebnisse. Wir fanden, dass für kleine Chroma gilt (Gl. 4.3;3-5)

$$\hat{C}_2(F, M_Y) = c_Y n_2 p_2(F, M_Y) \quad (4.6;1-3)$$

$$\hat{C}_3(F, M_Y) = c_Y n_3 p_3(F, M_Y)$$

$$\hat{C}_r(F, M_Y) = c_Y \sqrt{n_2^2 p_2^2(F, M_Y) + n_3^2 p_3^2(F, M_Y)}$$

wobei die sogenannten Mittelpunktskoordinaten

$$p_i(F, M_Y) = p_i(F) - p_i(M_Y) \quad (i = 2, 3) \quad (4.6;4)$$

je nach Value-Ebene einen anderen Farbort ($p_2(M_Y), p_3(M_Y)$) als Nullpunkt besitzen (siehe 4.3;Tabelle 4).

Wir definieren weiter

$$p_r(F, M_Y) = \sqrt{n_2^2 p_2^2(F, M_Y) + n_3^2 p_3^2(F, M_Y)} \quad (4.6;5)$$

Dann gilt für die Chroma-Stufung bei kleinem Chroma

$$\hat{C}_r(F, M_Y) \cong c_Y p_r(F, M_Y) \quad (4.6;6)$$

In Analogie mit der Helligkeits-Stufung für kleine Helligkeiten

$$V = c_1 \frac{Y}{c_2 + Y} \quad (4.6;7)$$

die wegen $c_1 \approx c_2$ für kleine Y in

$$V = \frac{Y}{\frac{c_2}{c_1} + \frac{1}{c_1} Y} \approx Y \quad (4.6;8)$$

übergeht, vermuten wir, dass gilt

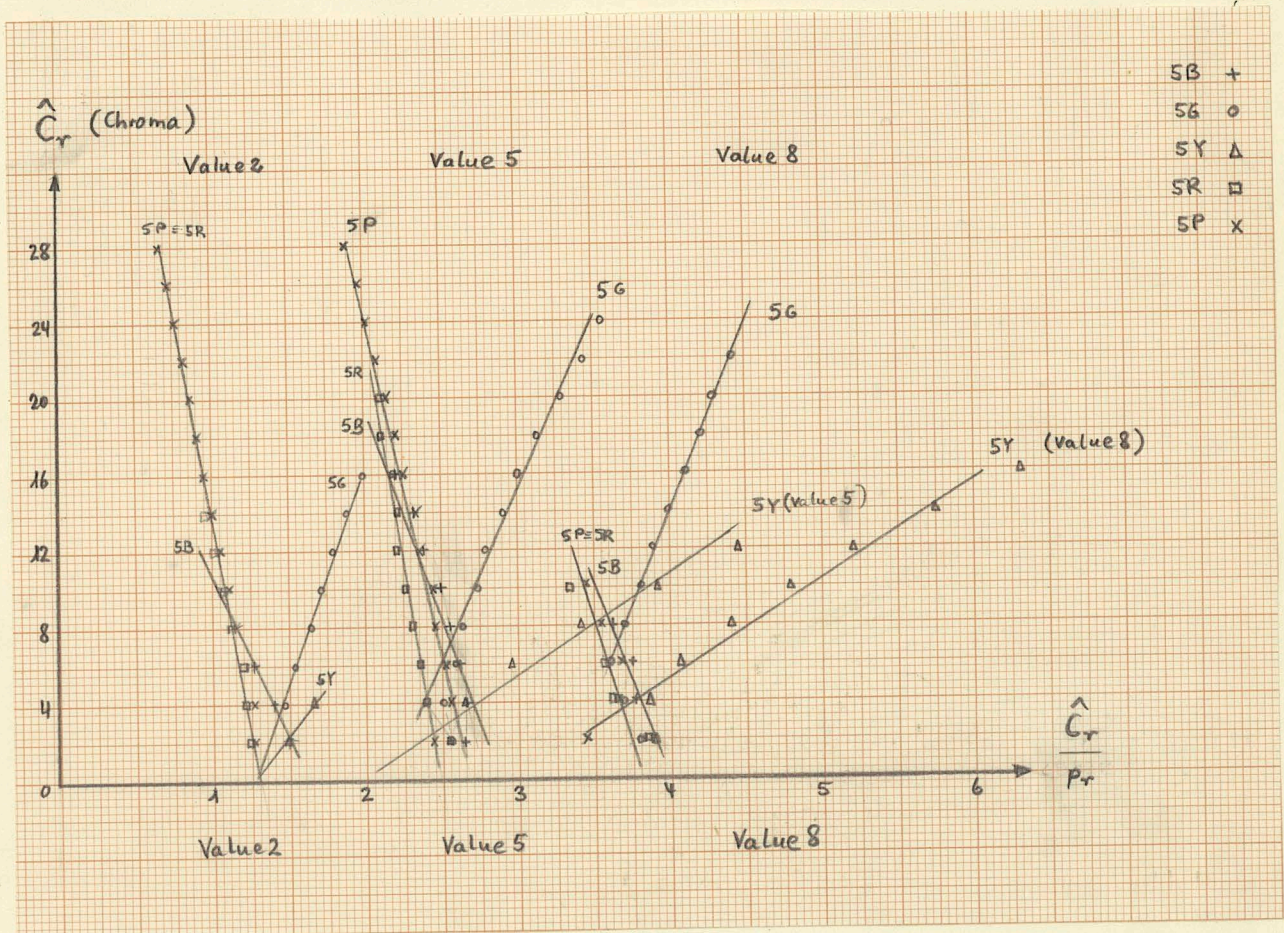
$$\hat{C}_r(F, u, m_Y) = c_1 \frac{c_Y p_r(F, m_Y)}{c_2 + c_Y p_r(F, m_Y)} \quad (4.6;9)$$

oder

$$\hat{C}_r(F, u, m_Y) = c_1 - \frac{c_2 \hat{C}_r(F, u, m_Y)}{c_Y p_r(F, m_Y)} \quad (4.6;10)$$

mit $c_1 \approx c_2$

Die Darstellung von \hat{C}_r als Funktion von \hat{C}_r/p_r zeigt, dass unsere Vermutung für alle Bunttöne und Helligkeiten näherungsweise erfüllt ist.



(4.6;Abb.1)

Chroma \hat{C}_r als Funktion von \hat{C}_r/p_r
(experimentell, MUNSELL-System, Value 2,5,8)

Es fällt auf, dass die Steigung

$$m(\lambda^*) = \frac{c_2}{c_1} \quad (4.6;11)$$

für entsprechende Bunttöne beliebigen Values ungefähr konstant ist.

Durch Vergleich von (4.6;9) mit (4.6;6) ergibt sich

$$c_1 \approx c_2 \quad (4.6;12)$$

und wir erhalten durch Einsetzen von (4.6;11-12) in (4.6;9)

$$\hat{C}_T(F, V, \bar{m}_Y) = \frac{c_Y p_T(F, \bar{m}_Y)}{1 + [1/m(\lambda^*)] p_T(F, \bar{m}_Y)} \quad (4.6;13)$$

Die Steigung $m(\lambda^*)$ beziehungsweise ihren Kehrwert bestimmen wir für jeden Buntton durch Ausgleichsrechnung. Wir legen für alle Bunttöne eine Gerade geringster Abweichung durch die experimentellen Punkte der Abb. 1.

Tabelle 1 enthält die Ergebnisse für 10 Bunttöne

Buntton	Value V	$1/\bar{m}(\lambda^*)$	λ^*	Anzahl I_V exp. Punkte	$1/\bar{m}(\lambda^*)$	$\bar{\lambda}^*$
5 PB	2	.038	473	7	.028	474
	5	.020	475	9		
5 B	2	.034	481	5	.021	481.5
	5	.012	482	8		
5 BG	2	-.017	489	6	-.017	489.5
	5	-.017	490	11		
5 G	2	-.029	503	8	-.026	503.5
	5	-.025	504	14		
5 GY	2	-.028	562	3	-.045	563
	5	-.053	564	6		
5 Y	2	-.094	578	2	-.105	577.5
	5	-.109	577	6		
5 YR	2	-.020	594	3	-.030	592
	5	-.035	590	7		
5 R	2	.020	497 c	7	.013	700
	5	.009	665	10		
5 RP	2	.018	521 c	9	.013	513.5 c
	5	.009	506 c	12		
5 P	2	.018	561.5c	14	.014	561.5 c
	5	.010	561.5c	14		

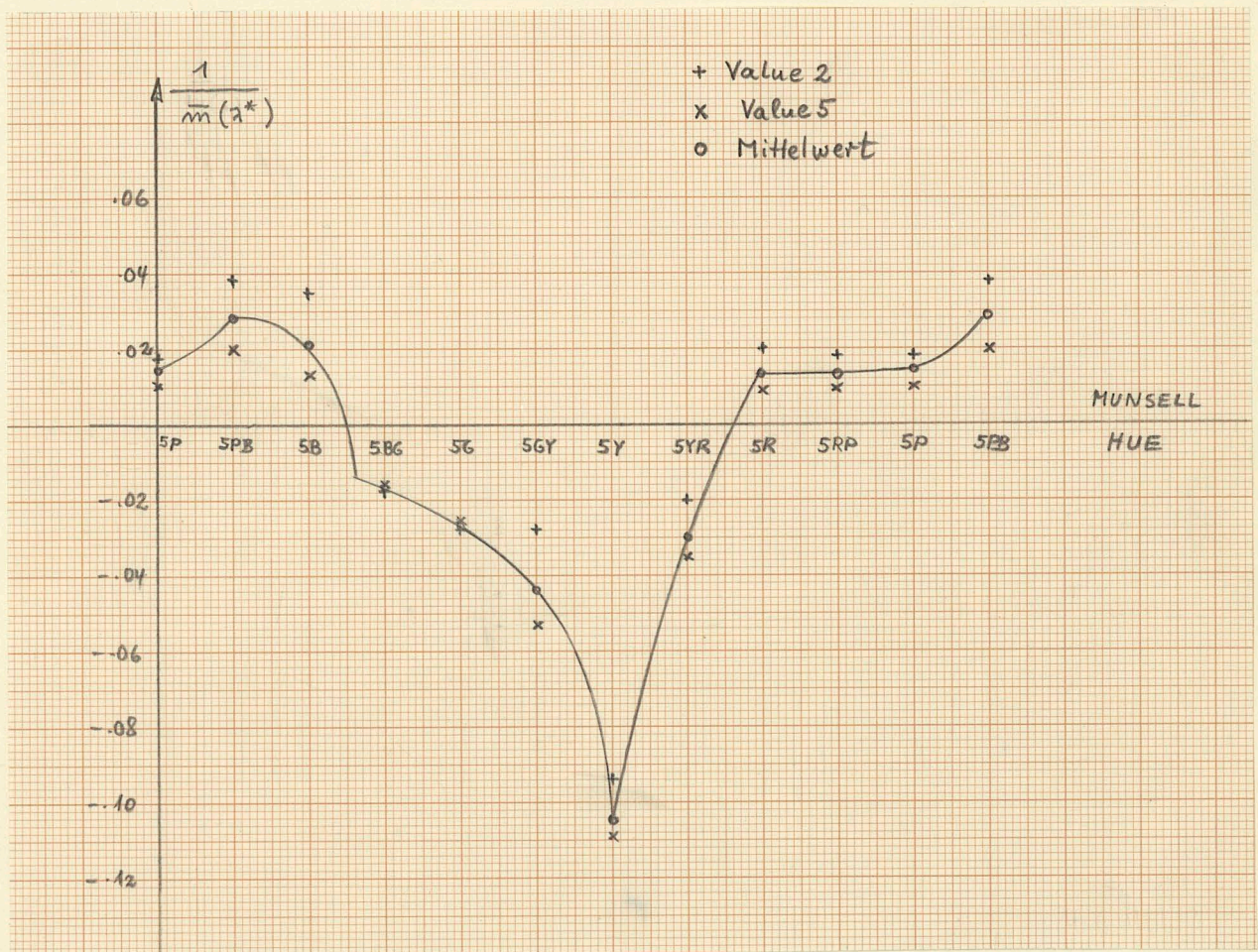
(4.6;Tabelle 1)

Zur Berechnung der Daten für die Chroma-Stufung

Die experimentellen Daten von Value 2 lassen sich meist besser durch eine Gerade annähern als die entsprechenden Daten von Value 5 oder 8. Für kleine Value liegen bei einigen Bunttönen nur wenige Messwerte I_Y vor. Zur Mittelwertbildung benutzen wir daher die Daten für Value 2 und 5 und berechnen den Mittelwert $1/\bar{m}(\lambda)$ entsprechend der Anzahl der Messpunkte I_2 und I_5 für Value 2 und 5. Wir definieren

$$\frac{1}{\bar{m}(\lambda^*)} = \frac{1}{I_2 + I_5} \left(\frac{I_2}{m_2(\lambda^*)} + \frac{I_5}{m_5(\lambda^*)} \right) \quad (4.6;14)$$

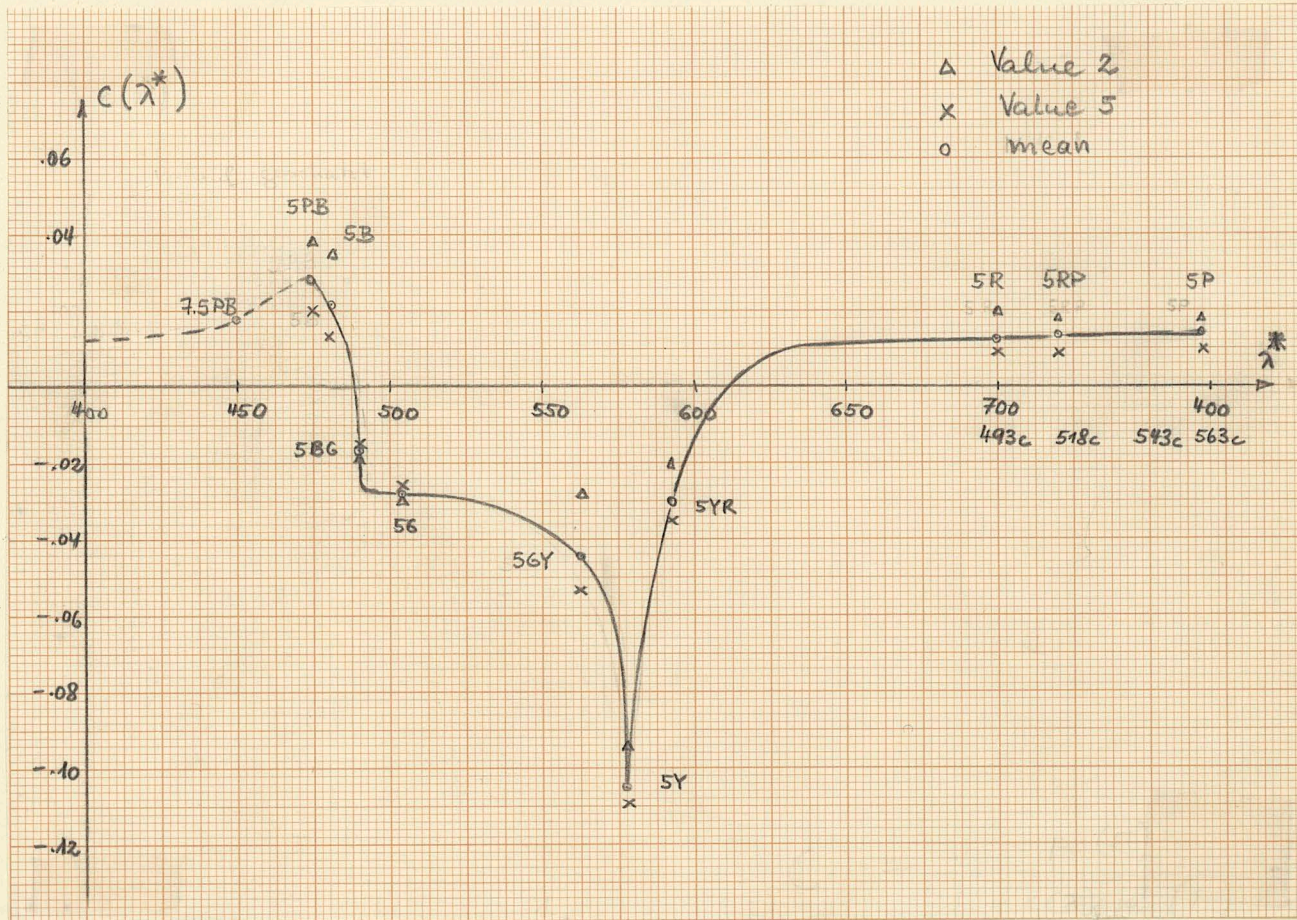
Die Mittelwerte für 10 Bunttöne enthält Tabelle 1. Die Einzelwerte ($1/m_Y(\lambda^*)$) für Value 2 und 5 sowie die Mittelwerte ($1/\bar{m}(\lambda^*)$) werden für alle 10 MUNSELL-Bunttöne in Abb.2 dargestellt.



(4.6;Abb.2)

Einzelwerte $1/m_Y(\lambda^*)$ und ihre Mittelwerte $1/\bar{m}(\lambda^*)$ nach Gleichung (4.6;14) für 10 MUNSELL-Bunttöne.

Die Mittelwerte $1/\bar{m}(\lambda^*)$ als Funktion der Wellenlänge λ^* zeigt Abb.3



(4.6; Abb.3)

Mittelwerte $1/\bar{m}(\lambda^*)$ als Funktion der Wellenlänge λ^* . Die Funktion zeigt einen Verlauf, der der spektralen Sättigung

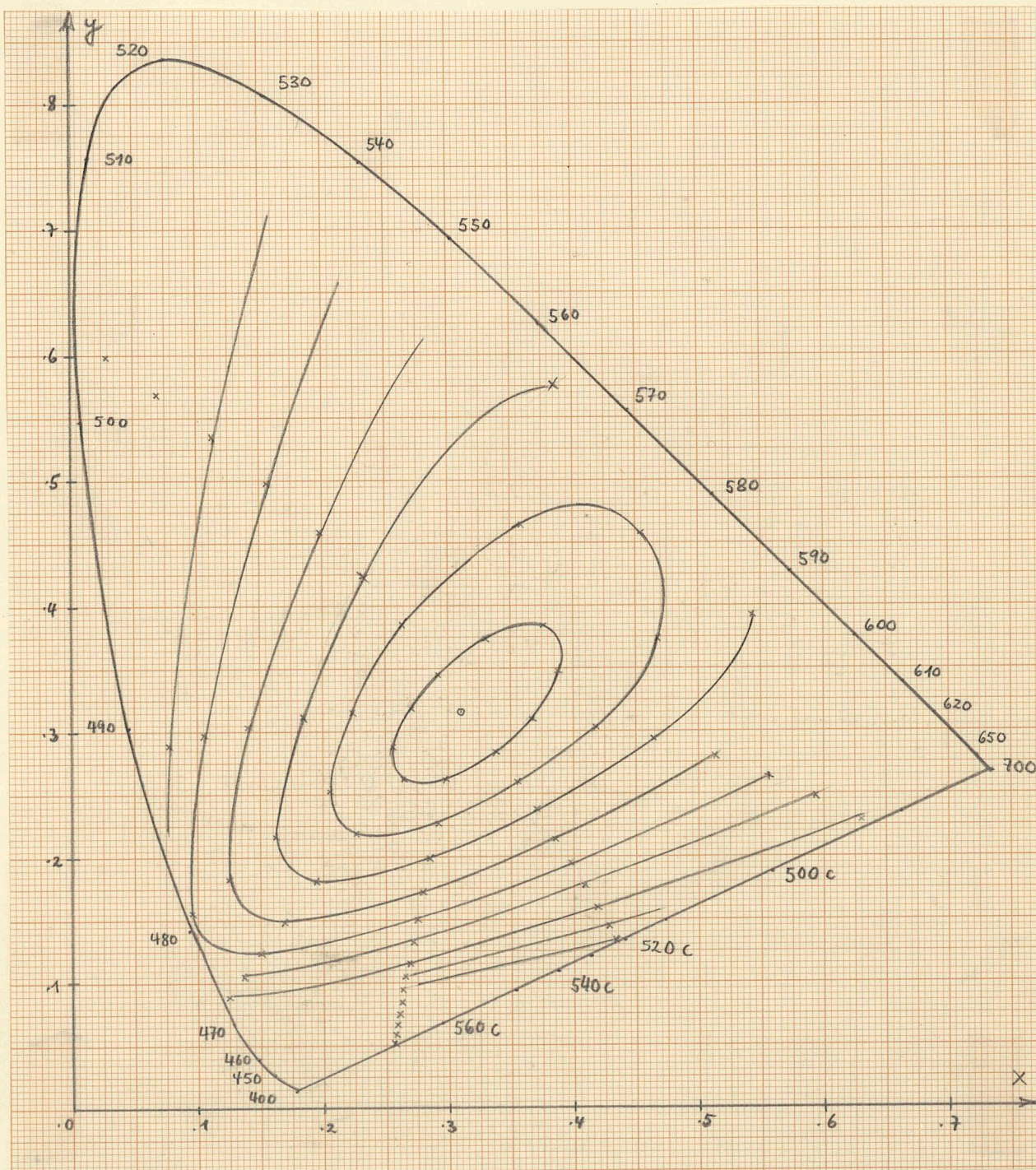
$$p_r^*(\lambda) = \sqrt{n_2^2 p_2^*(\lambda) + n_3^2 p_3^*(\lambda)} \quad (4.6; 15)$$

nahekommt. Diese Eigenschaft kann wahrscheinlich zur theoretischen Ableitung und Darstellung von $1/\bar{m}(\lambda^*)$ benutzt werden.

Dieser Weg soll jedoch nicht beschritten werden, weil die Mittelwerte $1/\bar{m}(\lambda^*)$ eine sehr grosse Streubreite aufweisen. Zur Aufstellung einer einfachen Farbdifferenzformel kann jedoch auch eine grobe Annäherung nützlich sein.

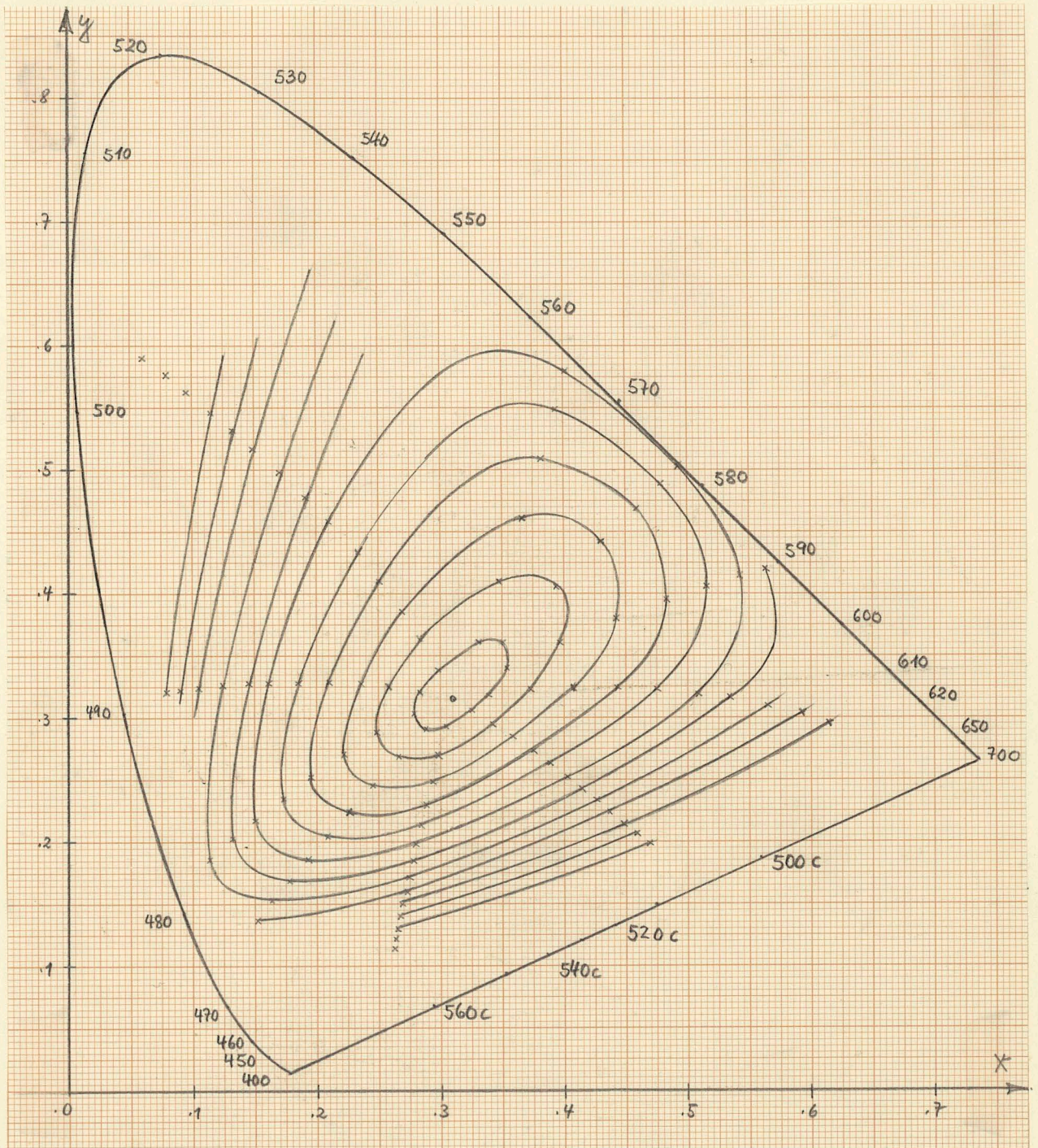
Die Konstanten $1/\bar{m}(\lambda^*)$ der Gleichung (4.6; 13) sind das theoretische Fundament zur Beschreibung der Chroma-Stufung.

Die Abbildungen 4, 5 und 6 zeigen experimentell ermittelte chromagleiche Farbreihen des MUNSELL-Systems in der CIE-Farbtabel. Die Beschreibung dieser Experimente ist unser Ziel. Zunächst müssen wir die Experimente vom Koordinatensystem (x, y) in das Koordinatensystem (n_2p_2, n_3p_3) mit $n_2 = 1$, $n_3 = 2.8$ nach Gleichung (4.2;14-16) transformieren. Wir erhalten die Abbildungen 7 - 9.



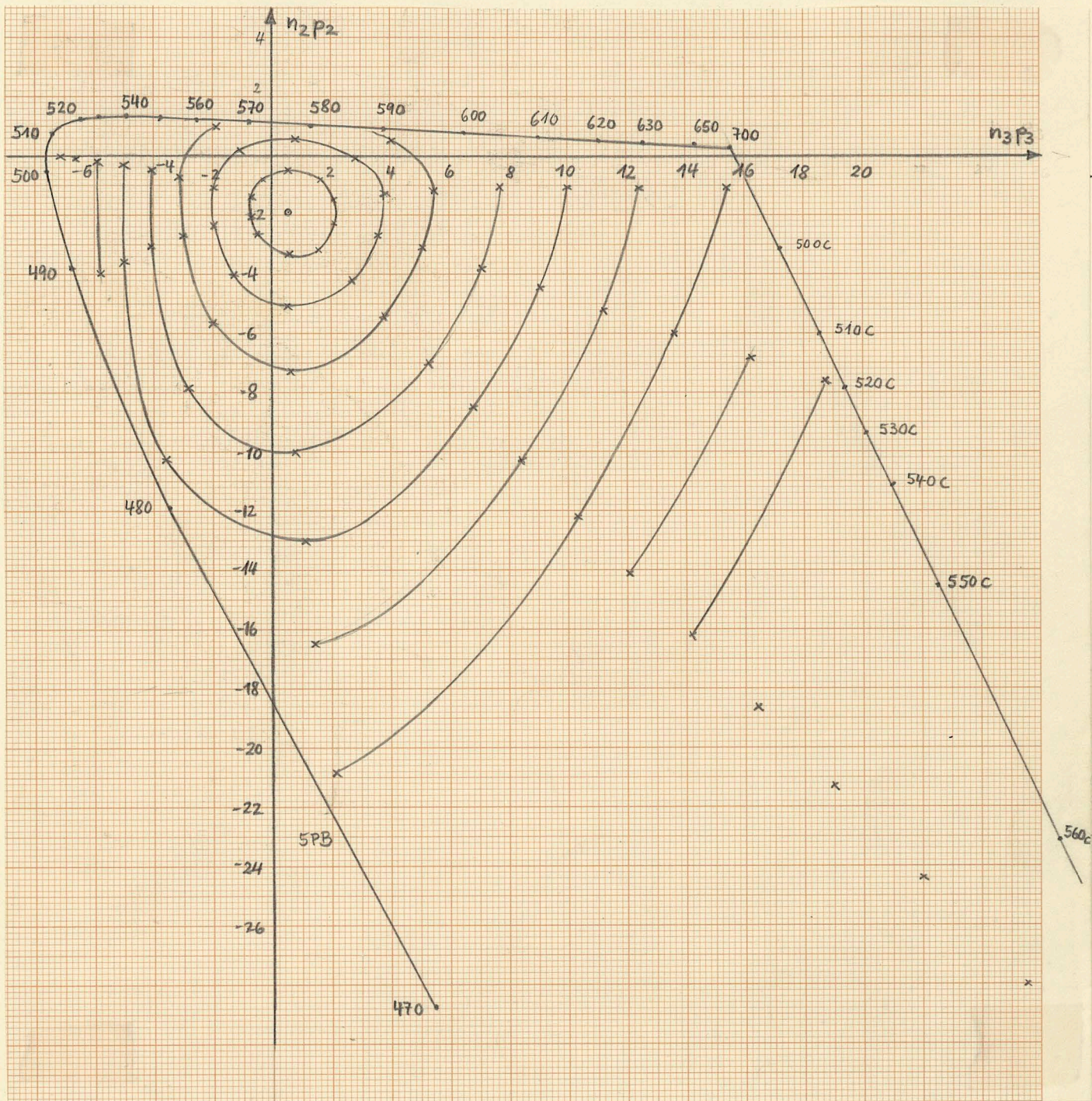
(4.6;Abb.4)

Chromagleiche Farbreihen des MUNSELL-Systems für Value 2
in der Farbtabel (x,y)
(experimentell)

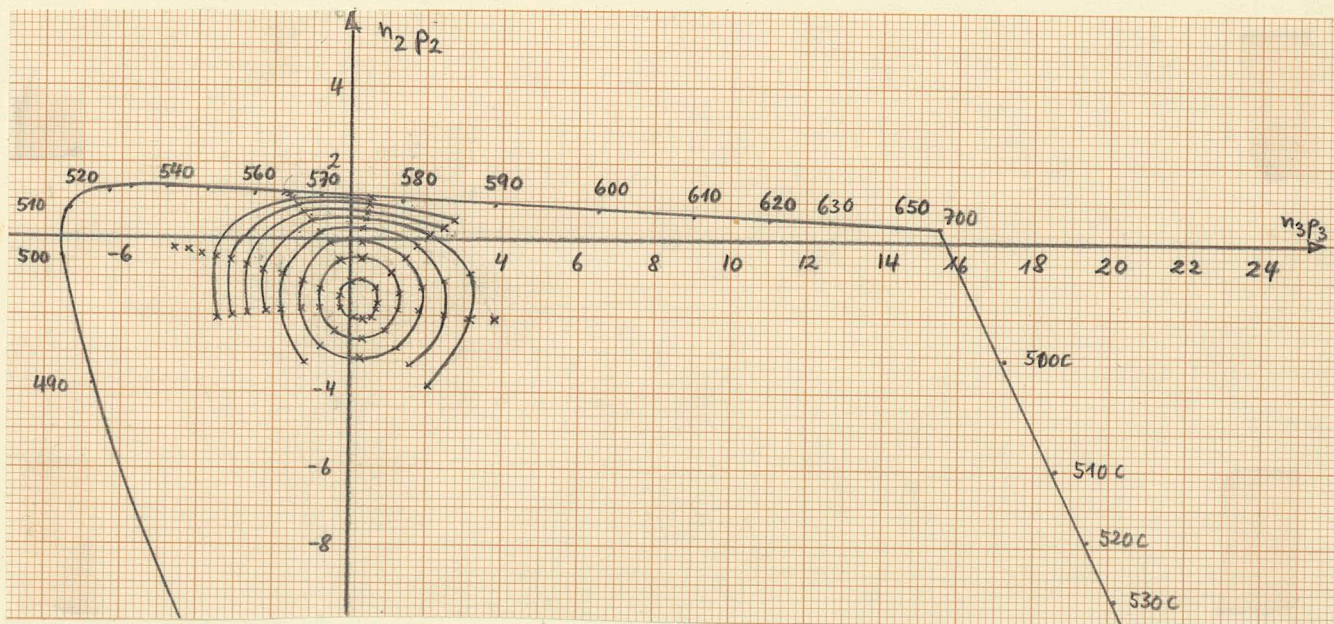
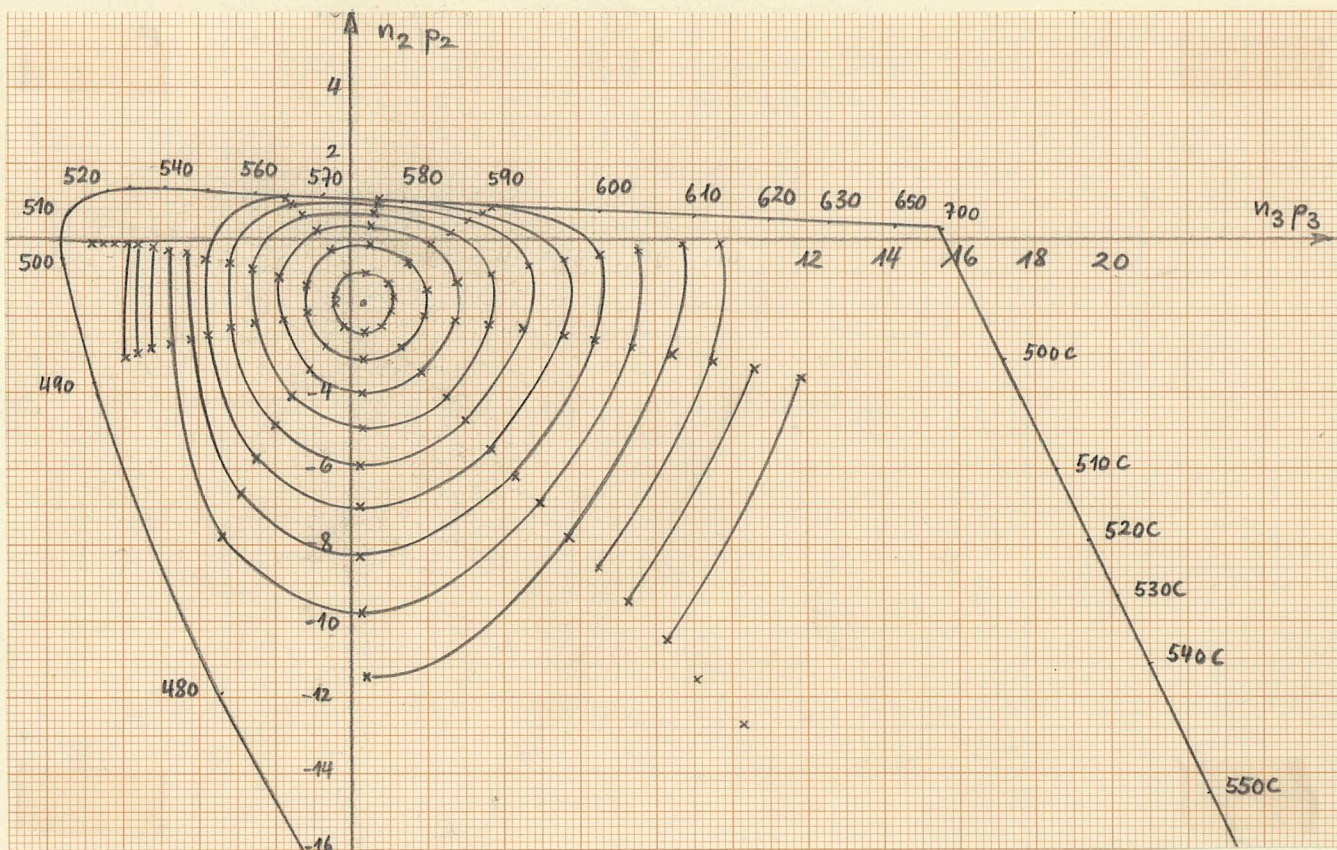


(4.6; Abb. 5)
 Chromagleiche Farbreihen des MUNSELL-Systems für Value 5
 in der Farbtafel (x,y)
 (experimentell)

(4.6; Abb. 6)
Chromagleiche Farbreihen des MUNSELL-Systems für Value 8
in der Farbtafel (x,y)
(experimentell)



(4.6; Abb. 7)
 Chromagliche Farbreihen des MUNSELL-
 Systems für Value 2 im Koordinatensystem
 (n_2p_2 , n_3p_3) transformiert nach
 Gleichung (4.2; 14-16)
 (experimentell)



(4.6; Abb. 8 und 9)
 Chromagleiche Farbreihen des MUNSELL-
 Systems für Value 5 und 8 im Koordinaten-
 system (n_2p_2 , n_3p_3) transformiert nach
 Gleichung (4.2; 14-16)
 (experimentell)

Mit Gleichung (4.6;13) berechnen wir für die 10 in Tabelle 1 angegebenen Wellenlängen die Koordinaten $p_r(F, M_Y)$ für Chroma 2, 4, 6, ... Es gilt

$$p_r(F, M_Y) = \frac{\hat{C}_r(F, u, m_Y)}{c_Y - \frac{\hat{C}_r(F, u, m_Y)}{\bar{m}(\lambda^*)}} \quad (4.6;16)$$

Die Mittelpunkte $p_i(M_Y)$ entnimmt man aus (4.3;Tabelle 4).

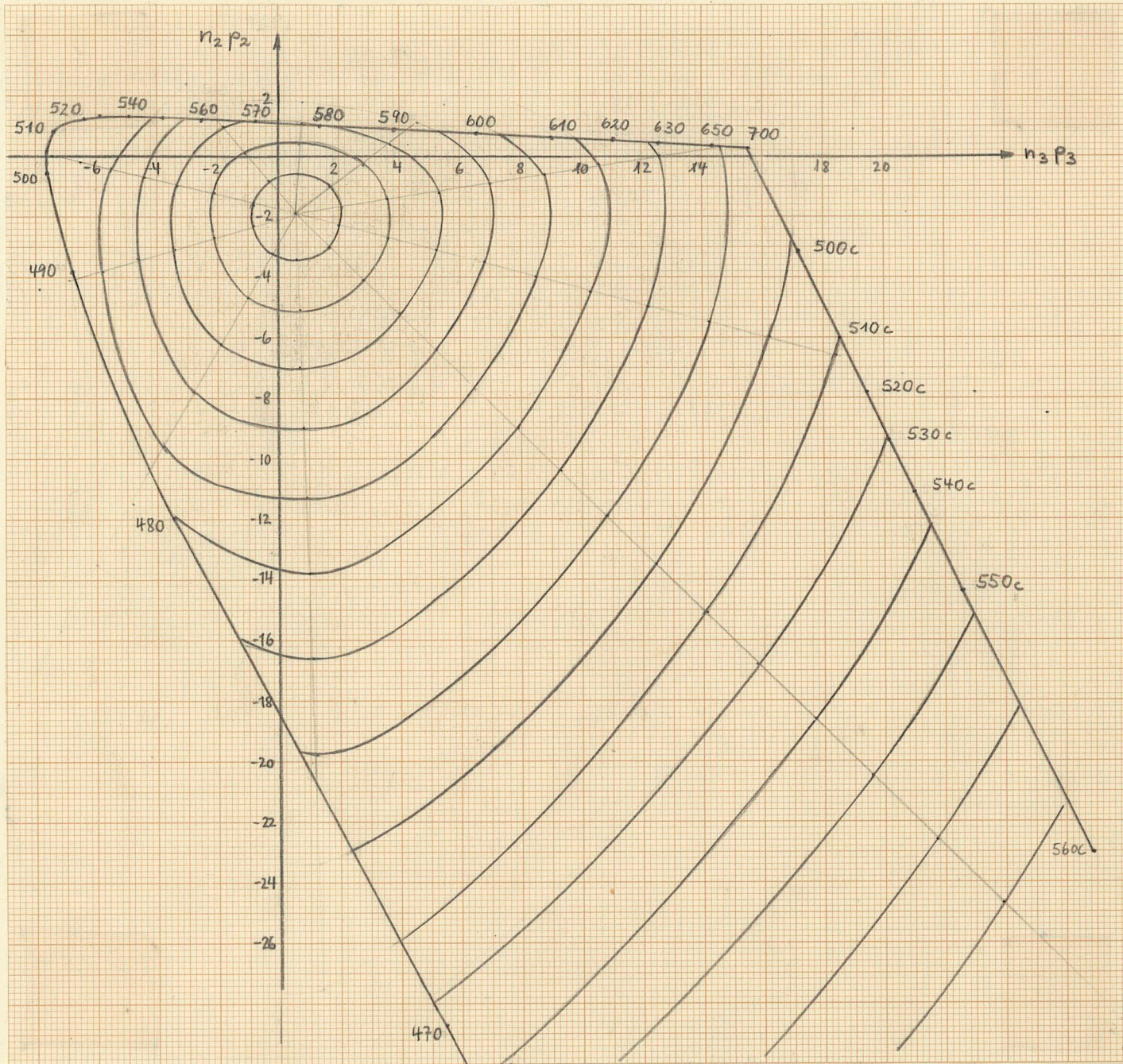
Value	$p_2(M_Y)$	$p_3(M_Y)$	$n_2 p_2(M_Y)$	$n_3 p_3(M_Y)$
2	-1.889	.205	-1.889	.575
5	-1.646	.118	-1.646	.334
8	-1.557	.087	-1.557	.246

(4.6;Tabelle 2)

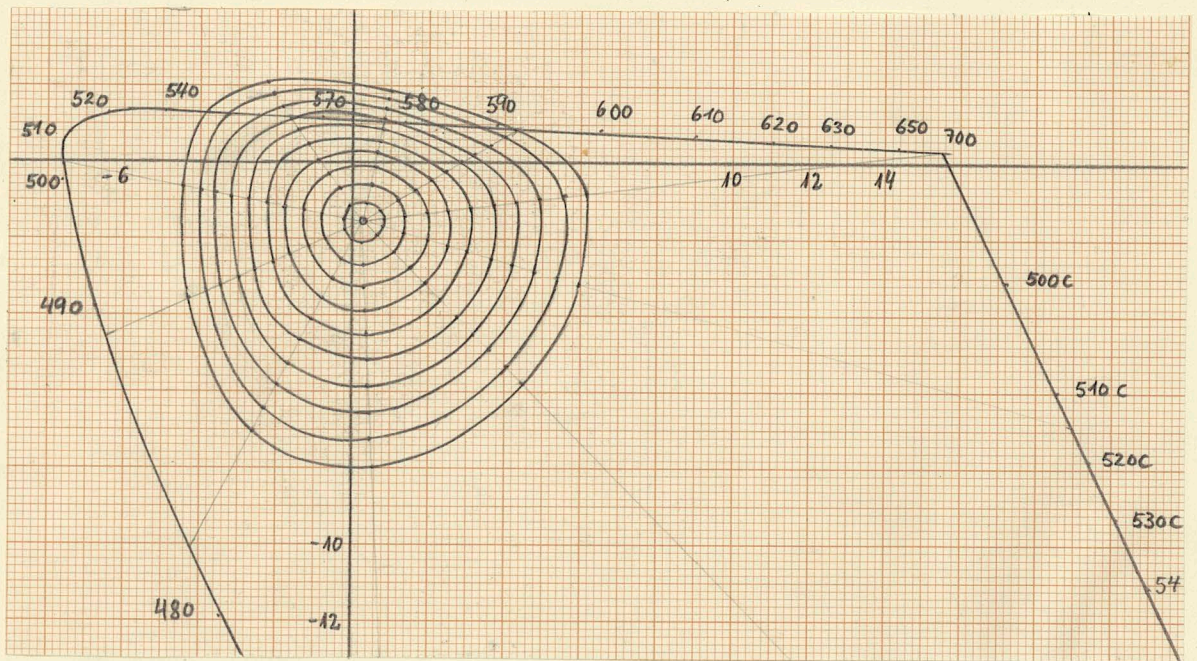
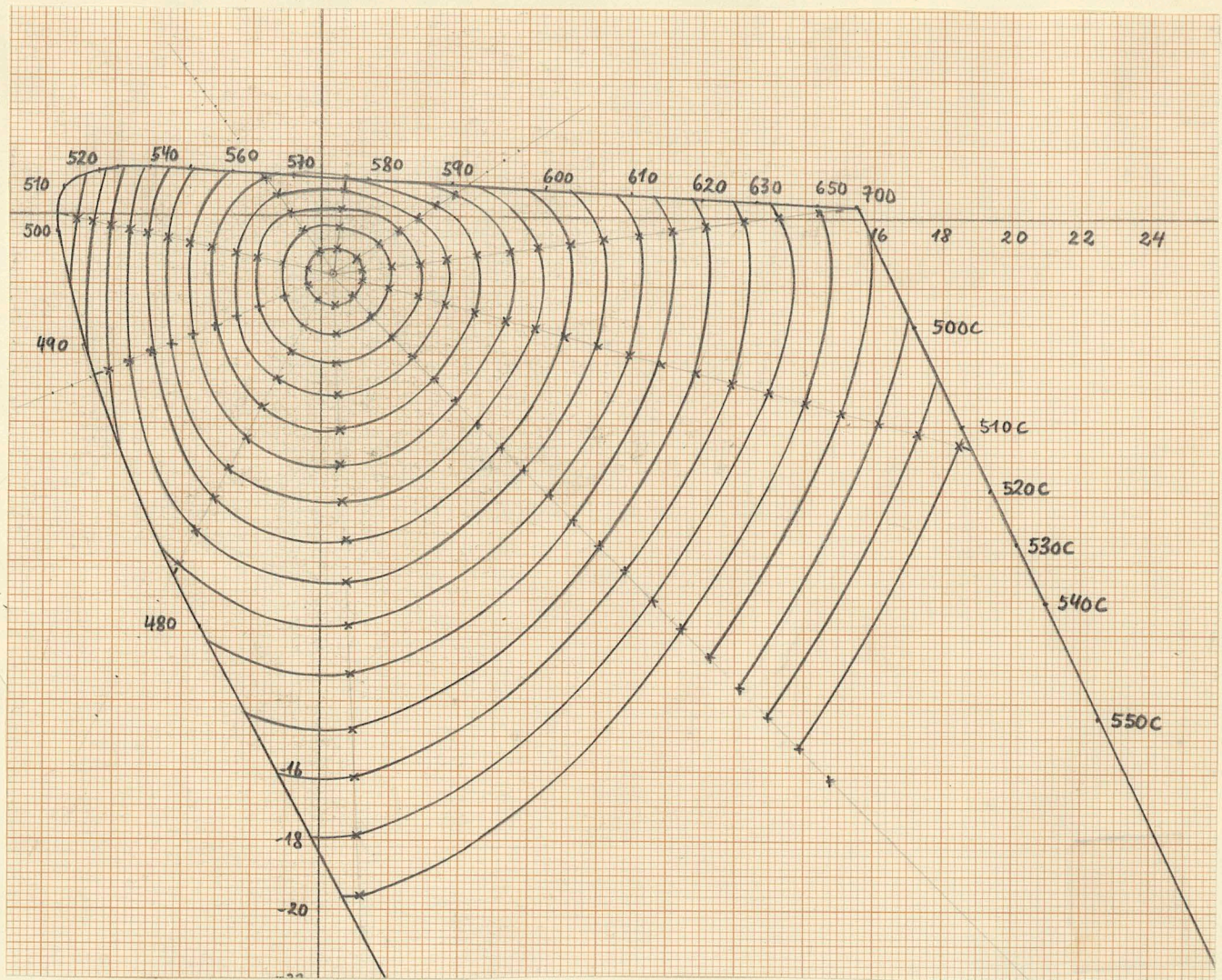
Mittelpunkte chromagleicher Farbreihen für Value 2,5,8 berechnet nach Gleichung (4.3;21-25).

Siehe auch (4.3;Tabelle 4).

Trägt man auf radialen Strahlen von diesen Mittelpunkten die mit Gleichung (4.6;16) berechneten Abstände $p_r(F, M_Y)$ in Richtung der Wellenlängen λ^* ab, so erhält man die chromagleichen Farbreihen im System $(n_2 p_2, n_3 p_3)$ für Value 2, 5 und 8 (Abb.10, 11 und 12).



(4.6; Abb. 10)
 Chromagliche Farbreihen des MUNSELL-
 Systems für Value 2 im Koordinatensystem
 ($n_2 p_2$, $n_3 p_3$) berechnet nach Gleichung
 (4.6; 16)
 (theoretisch, vergl. experimentell Abb. 7)



(4.6; Abb. 11 und 12)
 Chromagleiche Farbreihen des MUNSELL-
 Systems für Value 5 und 8 im Koordi-
 natensystem (n_2p_2 , n_3p_3) berechnet
 nach Gleichung (4.6;16)
 (theoretisch, vergl. experimentell
 Abb.8 und 9)

Da zwischen den CIE-Farbtafel-Koordinaten (x, y) und den Helligkeitsfarbtafelkoordinaten $(n_2 p_2, n_3 p_3)$ ein umkehrbar eindeutiger Zusammenhang besteht (siehe Kap. 4.2), so können die theoretisch gewonnenen Ergebnisse in die Farbtafel (x, y) transformiert werden. So lassen sich die aus der Theorie gewonnenen Ergebnisse (Abb. 13-15) mit den experimentellen Ergebnissen (Abb. 4-6) auch in der CIE-Farbtafel vergleichen.

Die Beschreibung der experimentellen Chroma-Stufung durch Gleichung (4.6;13) scheint erfolgreicher zu sein als nach allen bestehenden Theorien wie z.B. diejenigen von ADAMS¹⁾ und STILES²⁾.

Man muss allerdings beachten, dass die Funktion $1/\bar{m}(\lambda)$ die Verwendung vieler Parameter zulässt. Erst eine theoretische Ableitung der Funktion $1/\bar{m}(\lambda)$, die mit $p_r^*(\lambda)$ (spektrale Sättigung) im engen Zusammenhang zu stehen scheint, würde einen echten Vorteil ergeben.

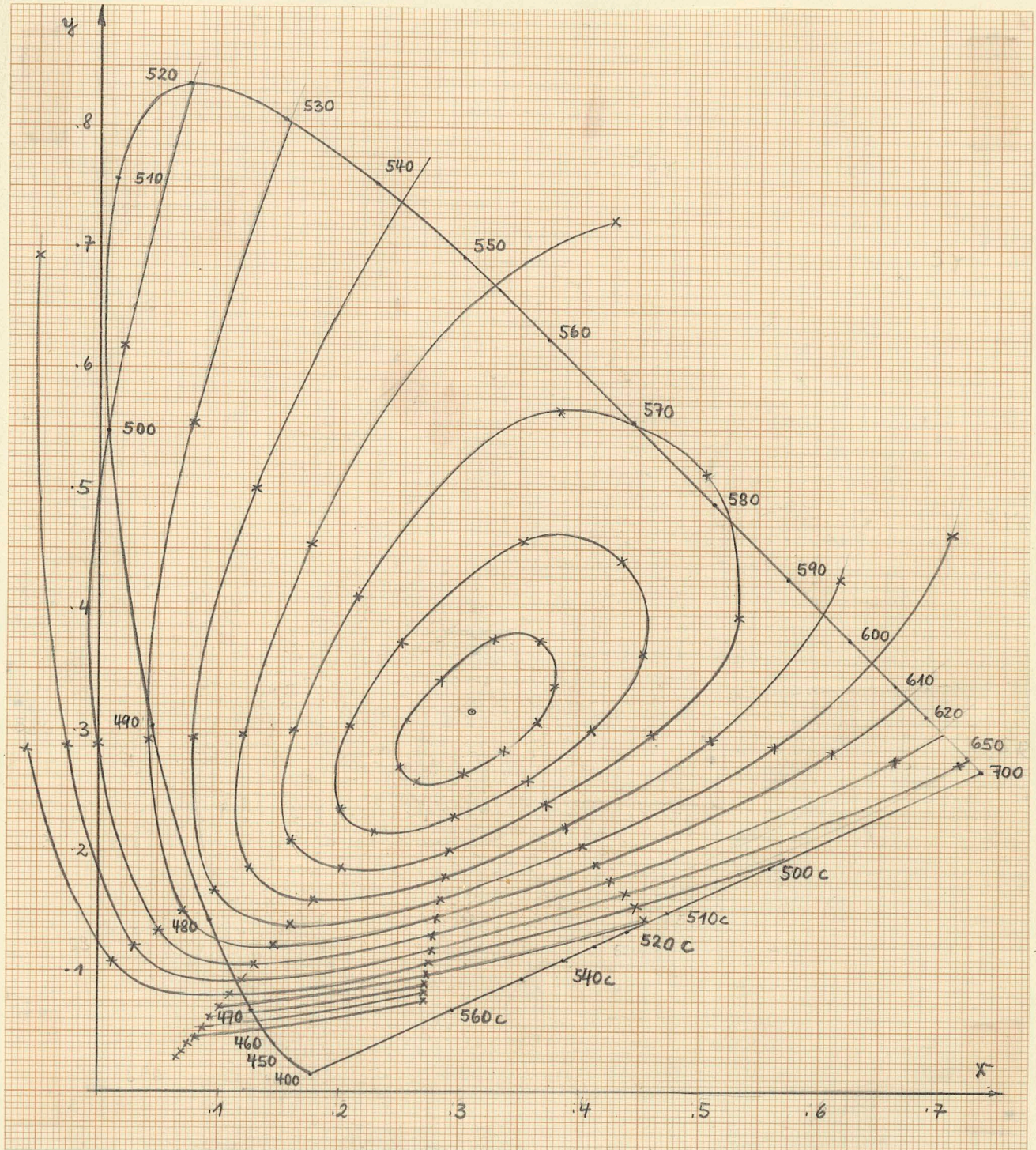
Eventuell bringt eine grobe Annäherung von $1/\bar{m}(\lambda)$ durch $p_r^*(\lambda)$ schon einen wesentlichen Vorteil gegenüber den bisherigen Theorien, denn nach Gleichung (4.6;13) liefert die Funktion $|1/\bar{m}(\lambda)|$ für nicht zu grosse p_r wegen $\left| \frac{1}{\bar{m}(\lambda)} p_r \right| \ll 1$ nur eine sekundäre Korrektur in der Chroma-Stufung. Da die Funktion $1/\bar{m}(\lambda)$ zur Beschreibung der Chroma-Stufung von grosser Bedeutung ist, werden die Funktionswerte in Abständen von 10 nm aus Abb.3 entnommen und in Tabelle 2 gelistet.

λ^*	$1/\bar{m}(\lambda^*)$	λ^*	$1/\bar{m}(\lambda^*)$	λ^*	$1/\bar{m}(\lambda^*)$	λ^*	$1/\bar{m}(\lambda^*)$
400	.014	500	-.027	600	-.014	700	.012
410	.015	510	-.028	610	-.002	500c	.013
420	.015	520	-.029	620	.006	510c	.013
430	.016	530	-.031	630	.010	520c	.013
440	.016	540	-.034	640	.011	530c	.013
450	.018	550	-.038	650	.011	540c	.013
460	.023	560	-.043	660	.012	550c	.014
470	.028	570	-.054	670	.012	560c	.014
480	.021	580	-.080	680	.012		
490	-.010	590	-.038	690	.012		

(4.6;Tab.2) Mittelwerte $c(\lambda^*) = 1/\bar{m}(\lambda^*)$ als Funktion von λ^*

1) Adams, E.Q., J.Opt.Soc.Am. 32, 168 (1942).

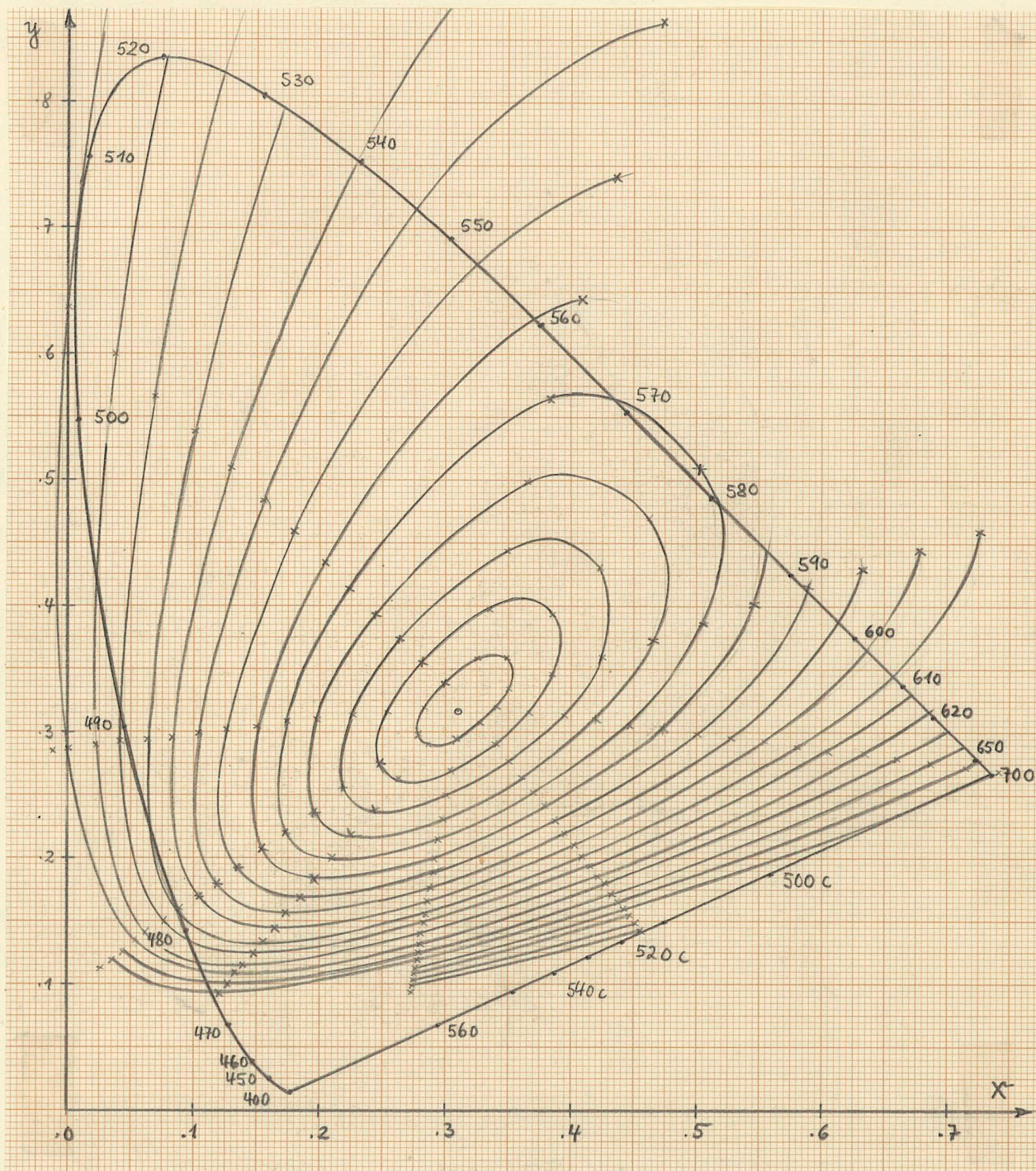
2) Wyszecki, G. and Stiles, W.S., Color Science, 527, Abb. 6.41 (1967).



(4.6; Abb. 13)

Chromagleiche Farbreihen des MUNSELL-Systems für Value 2
in der Farbtafel (x,y)

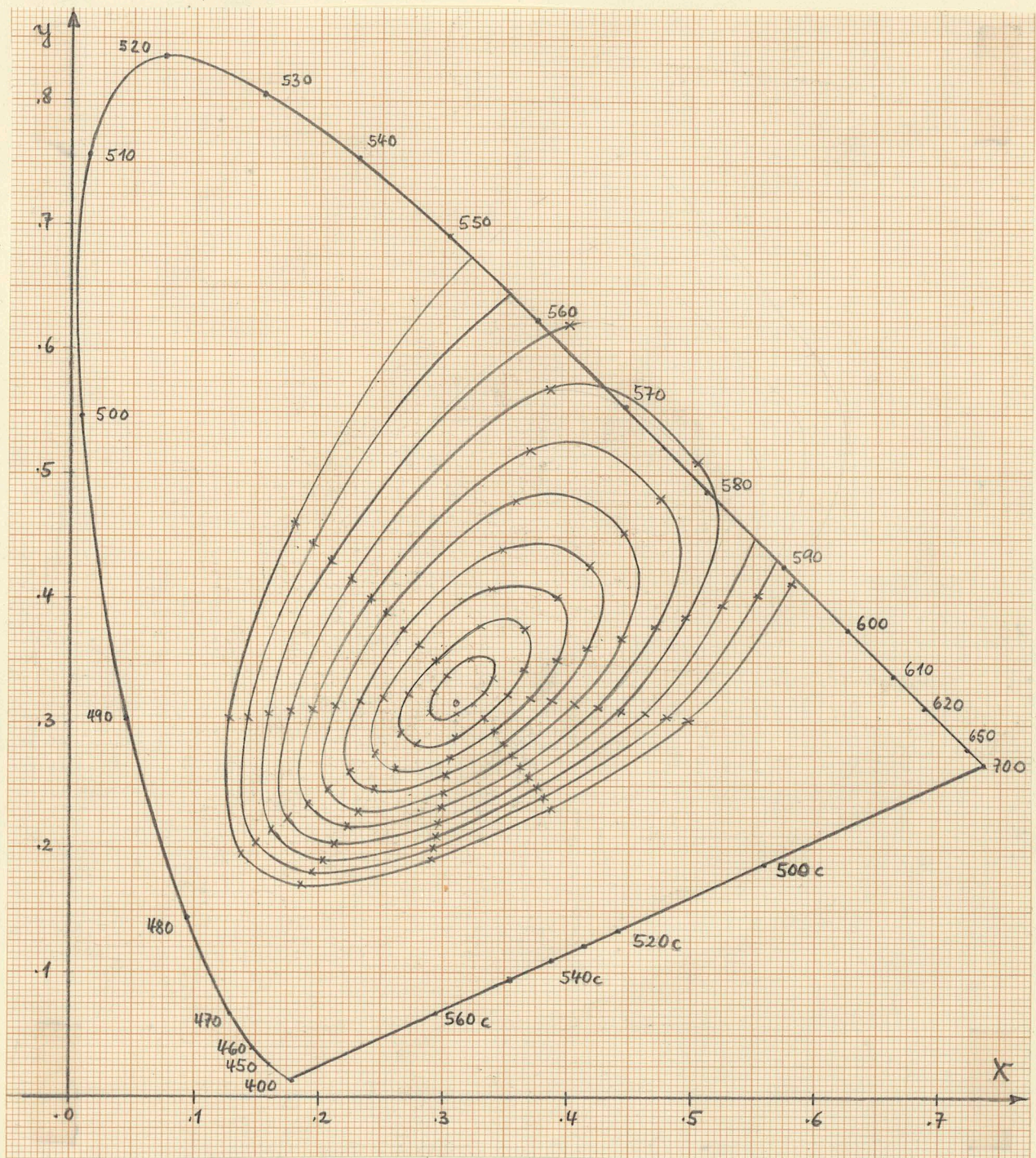
(theoretisch, vergl. experimentell Abb. 4)



(4.6; Abb. 14)

Chromagleiche Farbreihen des MUNSSELL-Systems für Value 5
in der Farbtafel (x,y)

(theoretisch, vergl. experimentell Abb. 5)



(4.6; Abb. 15)

Chromagleiche Farbreihen des MUNSELL-Systems für Value 8
in der Farbtafel (x,y)

(theoretisch, vergl. experimentell Abb. 6)

Zusammenfassung und Ausblick

Die empfindungsgemässe Einteilung der Farben führt auf 6 einfache Farben, einem unbunten Farbpaar Weiss-Schwarz und zwei bunten Farbpaaren Blau-Gelb und Rot-Grün.

Diese Einteilung kann durch ein Doppelkegelmodell veranschaulicht werden. Auf seiner Achse liegen die unbunten Farben Weiss-Grau-Schwarz und auf zwei zueinander senkrechten Ebenen durch diese Achse die einfachen bunten Farben Blau-Gelb und Rot-Grün. Die einfachen bunten Farben nennt man auch Urfarben (engl. unique hues). Sie lassen sich experimentell besonders leicht nach dem "Weder-noch"-Kriterium bestimmen. Zum Beispiel besitzen diejenigen Farben urgelben oder urblauen Buntton, welche im Bunttonkreis als weder grünlich noch rötlich empfunden werden.

Der funktionelle Einbau von genau 4 urfarbigen Bunttönen in einer Theorie des Farbensehens ist bisher nicht gelungen. Man vermutet, dass den 4 urfarbigen Umschlagpunkten in jedem kontinuierlichen Bunttonkreis Signale in unserem Nervenzentrum entsprechen, die im Blau-Gelb-Kanal oder im Rot-Grün-Kanal von positiv in negativ bzw. umgekehrt umschlagen.

Zur Entwicklung einer befriedigenden Theorie muss man berücksichtigen, dass die anteilige Mischfarbe (etwa mit Farbkreis) einer urroten und urgrünen Farbe nicht etwa je nach Mischverhältnis Urrot, Unbunt oder Urgrün empfunden wird, sondern bei einem bestimmten Mischverhältnis Urgelb aussieht. Die Mischfarbe zweier Ausgangsfarben ohne Blau-Gelb-Signal muss daher ein Blau-Gelb-Signal besitzen.

Diese Tatsache wird erstmals verständlich und mathematisch beschrieben.

Bekanntlich sind Farbkoordinaten bis auf affine Transformationen unbestimmt. Es wird gezeigt, dass unter Berücksichtigung der urfarbigen Bunttöne jedes System von affinen Farbkoordinaten auf ein gleiches und damit ausgezeichnetes Koordinatensystem führt. In diesem System lassen sich die urfarbigen Bunttöne, ihre Uebergänge und die Mischung von Urgelb aus Urrot und Urgrün er-

klären. Da auch andere Farbmerkmale wie z.B. die Buntkraft (Chroma im MUNSELL-System) für alle Helligkeitsebenen durch einfache Funktionen dieser Koordinaten beschrieben werden können, so handelt es sich möglicherweise um die seit langem gesuchten "ausgezeichneten Farbkoordinaten".

Die Grundideen der Theorie lassen sich in 5 Annahmen und 3 wesentlichen Ergebnissen zusammenfassen.

Ann. 1: Die Buntfunktionen sind Lineartransformationen der Rezeptorempfindlichkeiten

$$\psi_i(\lambda) = L_i [\alpha(\lambda), \beta(\lambda), \gamma(\lambda)] \quad (i = 1, 2, 3)$$

Ann. 2: Die Buntfunktionen sind Lineartransformationen der Spektralwertfunktionen

$$\psi_i(\lambda) = L_i [r(\lambda), g(\lambda), b(\lambda)] \quad (i = 1, 2, 3)$$

Ann. 3: Die Wellenlängen der spektralen Urfarben Blau λ_B , Grün λ_G , Gelb λ_Y und Rot λ_R (eventuell auf Purpurgeraden) sind Nullstellen der Buntfunktionen.

(Anmerkung: Die benutzten Wellenlängen sind wahrscheinlich identisch mit den Wellenlängen, die empfindungsgemäss den Buntton nicht ändern, wenn ihre Helligkeit innerhalb weiter Grenzen ohne Umfeld variiert wird; BEZOLD-BRUECKE-Effekt ohne Umfeld).

Ann. 4: Die Buntfunktionen $\psi_2(\lambda)$ und $\psi_3(\lambda)$ als Funktion der Wellenlänge sind invariant für alle Strahlungsverteilungen $u_1(\lambda)$, $u_2(\lambda)$, die als "Weiss" empfunden werden. Mit andern Worten: Die Empfindlichkeit unseres Auges ist invariant (Antithese zur von KRIES-Hypothese).

Ann. 5: Die Signale beliebiger Farben F mit der Strahlungsverteilung $f(\lambda)$

$$X_i(F) = \int \psi_i(\lambda) f(\lambda) d\lambda \quad (i = 1, 2, 3)$$

werden je nach Umfeld und Sättigung beeinflusst. Als Sättigung $p_i(F)$ ($i=2,3$) bezeichnen wir den Quotienten von Buntsignal $X_i(F)$ ($i=2,3$) und Unbuntsignal $X_1(F)$. Alle empfindungsgemässen Koordinaten sind einfache Funktionen dieser Koordinaten.

1. Ergebnis:

Die gleichabständige Helligkeitskoordinate V (Value-Funktion) ist eine Funktion der Koordinaten $X_1(F)$ und $X_1(U)$. Es gilt

$$V(F, U) = V_1 \left(\frac{Y_s}{s} \right)^n \left[\left(1 + s \frac{Y_F - Y_s}{Y_s} \right)^n - 1 \right]$$

mit	$V(F, U)$	Empfindungshelligkeit
	$Y_F = X_1(F)$	Infeld-Helligkeit
	$Y_u = X_1(U)$	Umfeld-Helligkeit (25.4)
	$Y_s = X_1(F_s)$	Helligkeit an der Schwelle (.1551) (Y_s ist unbekannte Funktion von Y_u)
	s	Schwellenfaktor (.4250)
	n	Exponent (.3333)
	V_1	asymptotische Konstante (2.5125) (Masstabsfaktor der willkürlichen Empfindungsskala)

In Klammern wurden jeweils die Konstanten angegeben, die sich für die Value-Stufung im MUNSELL-System ergeben. Für kleine Helligkeiten Y_F lässt sich obige Gleichung entwickeln. Man erhält

$$V(F, U)_{\text{kleine } Y_F} = \frac{c_1}{1 + c_2 / (Y_F - Y_s)}$$

Diese hyperbolische Gleichung mit Y_F an Stelle von $(Y_F - Y_s)$ wurde zur Helligkeitsstufung von ADAMS und COBB (1922), von JUDD (1940) sowie RUSHTON und NAKA (1967) benutzt.

2. Ergebnis:

Die Bunttonkoordinaten werden durch die Gleichung

$$X_i^*(F) = X_i(F) - f(\xi_F^*) X_i(U) \quad (i=2,3)$$

mit $f(\xi_F^*) = 1$ für $\xi^* = 0$ (Unbunt)

$f(\xi_F^*) = 0$ für $\xi^* = 1$ (Spektralfarbe)

beschrieben. Im System* werden die Bunttonkoordinaten der

urfarbigen Bunttöne Null. Für Urrot und Urgrün, die weder gelb noch blau empfunden werden, wird die Gelb-Blau-Buntkoordinate $X_2^*(F)$ Null. Für Urblau und Urgelb, die weder rot noch grün empfunden werden, wird die Rot-Grün-Buntkoordinate $X_3^*(F)$ Null. Damit wird erstmals ein Koordinatensystem benutzt, welches allen Farben von urfarbigem Buntton Nullkoordinaten zuordnet.

3. Ergebnis:

Die gleichabständigen Buntkraftkoordinaten C_2 und C_3 (Chroma) sind Funktionen der Helligkeiten $X_1(F)$ und $X_1(U)$ sowie der Sättigungsunterschiede $p_i(F, M)$ der Farben F zur unbunt empfundenen Mittelpunktsfarbe M .

Es gilt

$$\hat{C}_i = \frac{c_Y n_i p_i(F, M)}{1 + c(\lambda) p_r(F, M)} \quad (i = 2, 3)$$

und für die radiale Komponente

$$\hat{C}_r = \sqrt{\hat{C}_2^2 + \hat{C}_3^2} = \frac{c_Y p_r(F, M)}{1 + c(\lambda) p_r(F, M)}$$

mit

$$c_Y = .91 [X_1(F)]^{1/3} = .36 \sqrt[3]{V_1 [X_1(F)]^{1/3}}$$

$$p_i(F, M) = p_i(F) - p_i(M) \quad (i = 2, 3)$$

$$n_i \quad (i = 2, 3)$$

$$p_r(F, M) = \sqrt{n_2^2 p_2^2(F, M) + n_3^2 p_3^2(F, M)}$$

$$c(\lambda) \approx a_1 + a_2 [p_r(\lambda)]^{1/3}$$

In- und Umfeldhelligkeitsabhängige Funktion wie asympt. Value-Funktion $V(F, U)$

Sättigungsdifferenz der Farbe F und der unbunten Mittelpunktsfarbe M

Masstabsfaktoren, die das Verhältnis der Gelb-Blau und Rot-Grün Signale festlegen.

Radiale Komponente von $n_i p_i(F, M)$ ($i=2, 3$)

Bunttonabhängige Konstante teils < 0 (z.B. Gelb), teils > 0 (z.B. Blau) aber stets $|c(\lambda)| \leq 1$ (a_1, a_2 Konst)

Die für kleine Helligkeiten so wichtige hyperbolische Stufungsformel kehrt daher wieder bei der Buntkraftstufung. Da sie auch die Lautheitsstufung beim Ohr beschreibt, scheint sie eine fundamentale Rolle zu spielen.

Anmerkung 1

Die z.B. von EVANS mit Erfolg verwendete empirische Buntkraftstufungsformel

$$\hat{C}_r = a_\lambda p_c \cdot V$$

mit	V	Value Funktion
	$p_c = \frac{p_r(F, m)}{p_r(\lambda, m)}$	Relativsättigung (colorimetric purity)
	a_λ	Wellenlängenabhängige Konstante

ist nach unseren Ergebnissen wegen $|c(\lambda)| \ll 1$ nur für sehr kleine Sättigungen gültig. Unsere Ergebnisse liefern die physikalische Bedeutung der Konstanten a_λ und beschreiben die Stufung auch für grössere Sättigungen. Ausserdem wird die exzentrische Nullpunktverschiebung für Farben von kleinem Chroma plausibel und berücksichtigt.

Anmerkung 2

Eine ebenfalls mögliche Stufungsformel

$$\hat{C}_r = \frac{c_V p_r^*(F, m)}{1 + c^*(\lambda) p_r^*(F, m)} \quad (i = 2, 3)$$

welche also die Sättigung p_r^* als Quotient der unter 2 beschriebenen Bunttonkoordinaten $X_i^*(F)$ und der Helligkeit $X_1(F)$ verwendet, scheint die Experimente weniger gut zu beschreiben. Sollte sich dieses vorläufige Ergebnis bestätigen, so liegen in einem gleichabständigen euklidischen Farbenraum der Koordinaten (V, C_2, C_3) (Value, Chroma) mit dem Abstandsmass

$$\Delta F_{12} = \sqrt{\Delta V^2 + \Delta \hat{C}_2^2 + \Delta \hat{C}_3^2}$$

empfindungsgemäss bunttongleiche Farben nicht in Ebenen, weil kein linearer Zusammenhang zwischen Chromakordinaten (C_2, C_3) und Bunttonkoordinaten X_2^* und X_3^* besteht. Diese Aussage scheint

vernünftig. Das MUNSELL-System ist für den Bunttonkreis Value 5, Chroma 6 und innerhalb der Bunttonebenen gleichabständig. Für andere Bunttonkreise besteht wahrscheinlich keine Gleichabständigkeit.

Es scheint so, als ob die 3 Ergebnisse

- a) Empfindungshelligkeits-Stufung
- b) Bunttonkoordinaten
- c) Buntkraft-Stufung

den Kern einer empfindungsgemässen Theorie des Farbensehens bilden können. Die Theorie hat den Vorzug, dass nur sehr wenige Parameter frei wählbar sind. Wir wollen sie kurz aufzählen:

- 1) 9 Transformationskoeffizienten zwischen 3 Spektralwertfunktionen $r(\lambda)$, $g(\lambda)$, $b(\lambda)$ und den 3 Funktionen $\mathcal{V}_i(\lambda)$ ($i=1,2,3$) (Flimmerhelligkeitsfunktion, 2 Buntfunktionen). Die Transformationskoeffizienten sind durch die Helligkeitsbeiwerte und durch die spektralen Urfarben λ_Y (Gelb), λ_R (Rot), λ_G (Grün) und λ_B (Blau) eindeutig festgelegt. Es wird bewiesen, dass jedes frei wählbare System von Spektralwertfunktionen auf das gleiche System $\mathcal{V}_i(\lambda)$ ($i=1,2,3$) führt. Die Farbkoordinaten

$$X_i(F) = \int \mathcal{V}_i(\lambda) f(\lambda) d\lambda$$

nehmen daher unter den stets bis auf eine affine Transformation bestimmten Farbkoordinaten eine Sonderstellung ein. Im Gegensatz zu bisherigen Theorien erhalten unbunte Umfelder Buntkoordinaten $X_i(U) \neq 0$ ($i=2,3$).

- 2) 2 Masstabsfaktoren n_2 und n_3 , die das Amplitudenverhältnis der Gelb-Blau Buntfunktion $\mathcal{V}_2(\lambda)$ und Rot-Grün Buntfunktion $\mathcal{V}_3(\lambda)$ bestimmen, werden aus chromagleichen Farbreihen von kleinem Chroma bestimmt. Man findet $n_2 : n_3 \approx 1 : 2,8$.

- 3) Eine bunttonunabhängige Funktion $f(\zeta^*)$ mit einer freien Konstante k , die den Einfluss des Umfeldes auf den Buntton des Infeldes festlegt. Bei ungefähr kubisch zunehmendem Umfeld einfluss mit abnehmender Relativsättigung $\zeta^* = p_r^*(F) / p_r^*(\lambda)$ der Infeldfarbe verwendeten wir

$$f(\zeta^*) = \left[1 - \frac{\zeta^*(1+k)}{\zeta^* + k} \right] \quad (k \approx .8)$$

- 4) Die Helligkeitsschwelle Y_s und die Buntkraftschwellen C_s , die unbekannte Funktionen des Bunttons und der Helligkeit sind.

Obwohl die vorliegende Theorie mit wenigen Parametern auskommt, so kann sie experimentelle Ergebnisse und ihre Zusammenhänge wahrscheinlich besser beschreiben als andere. Wir haben daher Grund zu der Annahme, dass die vorliegende Koordinatenwahl ausgezeichnet ist.

Zur genaueren Festlegung der Parameter und Erweiterung der Theorie zeichnen sich folgende experimentellen Aufgaben ab:

- 1) Bestimmung der Urfarben bei bunten Umfeldern.
(Einige Experimente von HURVICH und JAMESON (1955)).
- 2) Bestimmung der Buntschwelle als Funktion von Buntton und Helligkeit (erste Experimente von EVANS (1967)).
- 3) Bestimmung der exzentrischen Nullpunktverschiebung (erste Experimente MUNSELL-System (1940)).

Diese Experimente können die unbekannten Parameter genauer festlegen und werden helfen, die experimentellen Ergebnisse des Farbensehens und ihre Zusammenhänge besser zu verstehen.

Diese Doktorarbeit wurde im Laboratorium für Farbenmetrik im Physikalischen Institut der Universität Basel angefertigt.

Herrn Dr., Dr.h.c. K. Miescher und Arne Valberg danke ich für wertvolle Anregungen während ihrer Durchführung.

Prof. Alder und Prof. Baldinger danke ich für ihre Unterstützung bei der Einreichung als Doktorarbeit. Prof. König und Dr. Mäder vom Eidgenössischen Amt für Mass und Gewicht danke ich für zahlreiche Hinweise zu ihrer Verbesserung.

In der Durchführung der Arbeit wurde ich vom Schweizer Nationalfonds und der Deutschen Forschungsgemeinschaft unterstützt.

Die Berechnungen wurden im Rechenzentrum der Universität Basel und im Deutschen Rechenzentrum in Darmstadt ausgeführt.

Curriculum vitae

Am 7. November 1940 wurde ich, Klaus Dieter Eugen Richter, als Sohn des Dekorateurs Herbert Richter und seiner Ehefrau Gretel, geb. Nebhut in Giessen (Deutschland) geboren. Mein Vater fiel 1942 in Stalingrad. Ich bin seit 1967 verheiratet. Meine Frau Erika, geb. Schwalbe ist von Beruf Lehrerin.

1960 bestand ich nach 4 Jahren Volksschule und 9 Jahren Gymnasium die Reifeprüfung an der Liebig-Schule in Giessen. Seit S.S. 1960 studierte ich an der Justus-Liebig-Universität Giessen. Hier bestand ich im 5. Semester die Diplom-Physiker-Vorprüfung. Es folgten 1 Semester Studium an der Technischen Universität Berlin und 2 Semester Studium an der Universität Basel. In Basel beteiligte ich mich neben dem Studium am Aufbau des wissenschaftlichen Sektors "Strahlung" der EXPO 64 in Lausanne. Für diese Arbeiten wurde ich vom Schweizerischen Nationalfonds unterstützt.

Vom 9. bis 12. Semester studierte ich erneut in Giessen und bestand nach Anfertigung meiner Diplomarbeit unter Prof. Kockel und Prof. Rösch mit dem Thema "Oszillatorfunktionenmodell des Farbensehens" im S.S. 1966 die Diplom-Hauptprüfung in Physik.

Seit W.S. 1967/68 bin ich wieder an der Universität Basel immatrikuliert. Hier besuchte ich das Seminar für theoretische Physik (Prof. Alder) und Vorlesungen über Biophysik (Frau P.D. Dr. Zschokke) sowie das Kolloquium. Die Dissertation mit dem Titel "Antagonistische Signale beim Farbensehen und ihr Zusammenhang mit der empfindungsgemässen Farbordnung" ist unter Leitung von Dr. K. Miescher (Experte der Schweiz in der Commission Internationale de l'Eclairage (CIE)) und Prof. Alder entstanden. Sie wurde vom Schweizerischen Nationalfonds gefördert.

Nach der Promotion möchte ich einer Einladung vom gegenwärtigen Präsidenten der CIE, Dr. G. Wyszecki, zur Mitarbeit in einem Forschungsteam an das National Research Council, Ottawa, Canada, Folge leisten.

DISS. 1969, 73

Antagonistische
ihr Zusammenha

beim Farbensehen und
der empfindungsgemässen

rdn



disse

zur

Erlangung

nes D

philosophie

legt d

Philosc

issensch

akultät

ersität

FRANCE

von

K

Eug

a

ssen),

en 196

rint OHG

Kat.

